

# **ΕΡΓΑΛΕΙΑΚΗ ΓΕΝΕΣΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΩΝ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ ΜΗΚΩΝ ΣΤΟ CABRI GEOMETRY II**

**Αθανασία Μπαλωμένου**  
υποψήφια διδάκτωρ ΤΕΕΑΠΗ, Πανεπιστήμιο Πατρών  
[smpalom@upatras.gr](mailto:smpalom@upatras.gr)

**Βασίλειος Κόμης**  
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ  
[komis@upatras.gr](mailto:komis@upatras.gr)

**Κωνσταντίνος Ζαχάρος**  
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ  
[zacharos@upatras.gr](mailto:zacharos@upatras.gr)

## **Περίληψη**

Στην εργασία μας διερευνούμε πώς ένα διαφορετικό πλαίσιο διδασκαλίας με αξιοποίηση υπολογιστικών εργαλείων συντελεί στην οικοδόμηση ποικίλων στρατηγικών σύγκρισης μηκών από μαθητές σύμφωνα με τη θεωρία της εργαλειακής γένεσης (Rabardel, 1995; Trouche, 2004). Στο πλαίσιο αυτό διερευνούμε πώς οι μαθητές αποδίδουν νέες χρήσεις στο εκπαιδευτικό λογισμικό (ε.λ.) Cabri Geometry II σχετικά με τη σύγκριση μηκών τμημάτων, αλλά παράλληλα πώς το εργαλείο διαμορφώνει τις ενέργειες των χρηστών.

Στο πείραμά μας συμμετείχαν 48 μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, (13-14 ετών). Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι οι μαθητές αξιοποίησαν δυναμικά τα εργαλεία του ε.λ. και σε συνδυασμό με τη λειτουργία “drag-mode” προσέγγισαν την έννοια της σύγκρισης μηκών με πολλούς διαφορετικούς τρόπους οι περισσότεροι από τους οποίους είναι ασυνήθιστοι για την σχολική πρακτική. Η προσέγγιση αυτή θα μπορούσε να υποστηρίξει την εννοιολογική κατανόηση των τυπικών αλγεβρικών

κανόνων σύγκρισης από τους μαθητές, οι οποίοι αποτελούν το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την κατανόηση της έννοιας της ανισότητας.

### Abstract

In this article we investigate how a different comparison system could contribute in the structure of intellectual activities and specifically comparison strategies in different ways. Our didactical approach is based on the exploitation of the educational software Cabri Geometry II., according to the theoretical framework of instrumental genesis (Rabardel, 1995; Trouche, 2004). In this context we investigate how students give new uses to the tool Cabri Geometry II while dealing with a task about the comparison of lengths, but also how the tool configures the user actions.

48 students of the 2nd grade of Greek Junior high school, 13-14 years participated in our research.

From the qualitative analysis of the data comes that students dynamically exploited the tools of Cabri and in combination with the 'drag-mode' operation they approached the notion of comparison of segments in many different ways, most of them unusual for the school practice. This theoretical perspective could offer insight into conceptual understanding of formal algebraic comparison rules, which are prerequisite for the conceptualization of the ordering properties and the notion of inequality.

**Λέξεις κλειδιά:** γνωστικά σχήματα, Cabri Geometry II, drag-mode, εργαλειακή γένεση, σύγκριση

### Εισαγωγή

Στη βιβλιογραφία αναφέρονται διάφοροι τρόποι για να συγκρίνουμε το μήκος δύο τμημάτων, ανάλογα με το πρόβλημα σύγκρισης και τα διαθέσιμα εργαλεία (Clements, 1999; Zacharos, 2006). Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας την οπτική μας αντίληψη, με αλληλοεπικάλυψη, χρησιμοποιώντας ένα εργαλείο μέτρησης κ.λπ. Η συνήθης προσέγγιση για τη σύγκριση μηκών στο ελληνικό σχολείο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης είναι η αριθμητική μέτρηση με χρήση χάρακα, ενώ η κυρίαρχη στρατηγική της Ευκλείδεια Γεωμετρίας στη σύγκριση μεγεθών είναι αυτή της επικάλυψης (*επίθεσης* - από το *επί θέτω*), (Zacharos, 2006). Σε αυτό το άρθρο, αναλύουμε τις ενέργειες των μαθητών σε μια δραστηριότητα σύγκρισης μηκών ως συνάρτηση του εργαλείου διαμεσολάβησης που χρησιμοποιούν. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τα εργαλεία που οι μαθητές έχουν στη διάθεσή τους διαμορφώνουν τις στρατηγικές επίλυσης που

αναπτύσσουν στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης δραστηριότητας (Rabardel, 1995; Guin & Trouce, 2002). Η χρήση ενός εργαλείου δεν είναι ποτέ ουδέτερη (Rabardel & Samușay, 2001). Αντίθετα, συντελεί στην εκ νέου οργάνωση και κινητοποίηση των γνωστικών δομών των μαθητών σχετικά με την υπό διερεύνηση έννοια.

Στην παρέμβασή μας, διερευνούμε τις διαφορετικές προσεγγίσεις σύγκρισης μηκών που αναπτύσσουν μαθητές ίδιας ηλικίας, ως αποτέλεσμα κοινωνικής και πολιτισμικής αλληλεπίδρασης, με αξιοποίηση του Cabri Geometry II στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου, στο πλαίσιο μιας κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας. Στο πείραμά μας, οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν δύο μεγέθη -τα μήκη δύο τμημάτων- σε μια κατάσταση όπου η άμεση οπτική σύγκριση δεν επαρκούσε. Βιβλιογραφικά δεν αναφέρονται έρευνες σχετικά με τα νοητικά σχήματα σύγκρισης τμημάτων που αναπτύσσουν οι μαθητές κατά την αλληλεπίδρασή τους με εργαλεία ψηφιακής τεχνολογίας όπως το Cabri, στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας.

#### **Εννοιολογικό πλαίσιο: Η εργαλειακή γένεση (Instrumental Genesis)**

Το τεχνούργημα (artifact) είναι ένα αντικείμενο με προκαθορισμένες χρήσεις (Kieran & Drijvers, 2006). Το 'όργανο' (instrument) είναι μια ψυχολογική κατασκευή που δημιουργείται από ένα τεχνούργημα (artifact) ή μέρος αυτού κατά τη διάρκεια χρήσης του από το υποκείμενο στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας.

Η διαδικασία μετατροπής ενός 'τεχνουργήματος' (artifact) σε 'όργανο' (instrument) στα χέρια ενός χρήστη ονομάζεται εργαλειακή γένεση (instrumental genesis). Είναι μια διαδικασία κατά την οποία μαθητευόμενος και τεχνούργημα συν-διαμορφώνονται στην πράξη (Vérillon & Rabardel, 1995). Αυτή η διαδικασία αναπτύσσεται μέσα από δύο συμπληρωματικές, ταυτόχρονες και αμφίδρομες διαδικασίες (Artigue, 2002). Από τη μια μεριά, υπάρχει η διαδικασία 'instrumentalisation', κατά την οποία το υποκείμενο διαμορφώνει και προσαρμόζει το τεχνούργημα εμπλουτίζοντάς το σταδιακά με δυνατότητες για τις οποίες το τεχνούργημα δεν ήταν αρχικά μελετημένο (Artigue, 2002). Από την άλλη, υπάρχει η διαδικασία 'instrumentation' κατευθυνόμενη από το τεχνούργημα προς το υποκείμενο, και κατά την οποία το υποκείμενο διαμορφώνει τις δράσεις του με βάση τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του τεχνουργήματος. (Trouche, 2004).

Στο πλαίσιο της εργαλειακής γένεσης δημιουργούνται νοητικά σχήματα από τη δραστηριότητα του υποκειμένου τα οποία σταδιακά διαμορφώνονται ως τεχνικές που του επιτρέπουν να ανταποκριθεί αποτελεσματικά σε

δοσμένες δραστηριότητες (Artigue, 2002). Τα σχήματα χρήσης (utilizations schemes, όπως αναφέρουν οι Bussi & Mariotti, 2008) αναπτύσσονται και οριοθετούνται από την ίδια τη δραστηριότητα στην οποία εμπλέκεται ο χρήστης και σχετίζονται είτε με τις λειτουργικότητες του εργαλείου είτε με την υπό διαπραγμάτευση μαθηματική έννοια.

Η εργαλειακή γένεση είναι μια πολύπλοκη και χρονοβόρα διαδικασία (Artigue, 2002), άμεσα εξαρτώμενη από τις δυνατότητες και περιορισμούς του τεχνουργήματος, από τη δραστηριότητα του μαθητή στο πλαίσιο μιας κατάλληλα οργανωμένης δραστηριότητας του δασκάλου, από τις πρότερες γνώσεις και μεθόδους εργασίας του μαθητή (Trouche, 2004).

### **Ερευνητικό Ερώτημα**

Στη εργασία μας διερευνούμε: 1) εάν και σε ποιο βαθμό το ε.λ. Cabri Geometry II διαμορφώνει και καθορίζει τις στρατηγικές σύγκρισης μηκών που αναπτύσσουν οι μαθητές, 2) εάν και σε ποιο βαθμό ο μαθητής επιδρά στο εργαλείο στο πλαίσιο μιας κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας ανοιχτού τύπου και πολλαπλών επιλύσεων (Balomenou & Kordaki, 2009) σχετικά με τη σύγκριση μηκών, δίνοντας στο εργαλείο νέες χρήσεις.

### **Μεθοδολογία**

Η παρούσα ποιοτική έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης που έλαβε χώρα στο σχολικό εργαστήριο πληροφορικής του Πειραματικού Γυμνασίου Πανεπιστημίου Πατρών. Προηγήθηκε μια φάση εξοικείωσης των μαθητών με τα εργαλεία του Cabri Geometry II, διάρκειας μίας ώρας.

**Δείγμα της έρευνας:** Δύο πλήρη τμήματα μαθητών της Β΄ τάξης του σχολείου (48 μαθητές, 13-14 ετών) συμμετείχαν στο πείραμα. Αυτοί οι μαθητές εργάστηκαν σε τέσσερις ομάδες που τις ονομάσαμε B.1.1, B.1.2, B.2.1 και B.2.2 των 13, 11, 12 και 12 μαθητών αντίστοιχα.

**Ερευνητική διαδικασία:** Κάθε ομάδα εργάστηκε ξεχωριστά στο σχολικό εργαστήριο πληροφορικής. Οι μαθητές κάθε ομάδας εργάστηκαν ατομικά αξιοποιώντας το ε.λ. Cabri Geometry II συμπληρώνοντας ταυτόχρονα ένα ειδικά σχεδιασμένο φύλλο εργασίας, προκειμένου να φέρουν εις πέρας τη δραστηριότητα σύγκρισης μηκών. Κάθε μαθητής συμμετείχε για περίπου μία ώρα για να ολοκληρώσει τη δραστηριότητα. Το πείραμα ήταν προσαρμοσμένο σε πραγματικές συνθήκες της τάξης.

### **Η Δραστηριότητα**

Οι μαθητές κλήθηκαν να αξιοποιήσουν τα εργαλεία του Cabri Geometry II, προκειμένου να συγκρίνουν το μήκος δύο ευθυγράμμων

τμημάτων στο περιβάλλον του Cabri Geometry II (Εικόνα 1) και να αιτιολογήσουν τις στρατηγικές λύσης τους στο φύλλο εργασίας τους. Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να δημιουργήσουν όσο το δυνατόν περισσότερες στρατηγικές σύγκρισης αξιοποιώντας τα εργαλεία του Cabri Geometry II.

Κατά την έναρξη της δραστηριότητας, δεν προσδιορίστηκε στους μαθητές κάποιο συγκεκριμένο επίπεδο ακρίβειας για τη σύγκριση των δύο τμημάτων. Έτσι, διαδικασίες προσέγγισης, όπως η οπτική αντίληψη θα μπορούσαν να θεωρηθούν κατάλληλες υπό αυτές τις συνθήκες. Ωστόσο, όπως μπορεί κανείς να δει στην εικόνα 1, τα δύο τμήματα είναι εσκεμμένα σχεδιασμένα με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι δύσκολο να συγκριθούν άμεσα μόνο με τη χρήση οπτικής αντίληψης.



Εικόνα 1: Στιγμιότυπο δραστηριότητα σύγκρισης μηκών στο Cabri Geometry II

### **Το εκπαιδευτικό περιβάλλον CABRI GEOMETRY II**

Το Cabri-Geometry II είναι ένα δυναμικό, οπτικό περιβάλλον μάθησης με στοιχεία υψηλής αλληλεπίδρασης, το οποίο υποστηρίζει την ανάπτυξη διερευνητικής προσέγγισης στη διδασκαλία και τη μάθηση και επιτρέπει στον δάσκαλο να προσαρμόζει το συγκεκριμένο μικρόκοσμο ανάλογα με τους διδακτικούς στόχους που θέτει (Noss & Hoyles, 1996). Το Cabri-Geometry II βοηθά στην ανάπτυξη της αλληλεπίδρασης μεταξύ του εικονικού και του εννοιολογικού μέρους της γεωμετρικής λογικής. Η αλληλεπίδραση συντελείται με τις εντολές που υπάρχουν ως εικονίδια στο περιβάλλον διεπαφής του Cabri-Geometry II. Με τα εργαλεία αυτά οι χρήστες μπορούν να διερευνούν και να χειρίζονται με ποιοτικό αλλά και με ποσοτικό τρόπο έννοιες, αντικείμενα, σχέσεις και προβλήματα (Healy et al., 2001) στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένων δραστηριοτήτων.

Η πιο εμφανής ίσως συνεισφορά του Cabri στη διαδικασία διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και μάθησης των μαθητών είναι η δυναμική οπτικοποίηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων που διατηρούνται ύστερα από σύρσιμο ('drag mode'), (Laborde, 2001). Η λειτουργία 'drag mode' έχει χρησιμοποιηθεί με διάφορους τρόπους (Balomenou & Kordaki,

2009): 1) παρατήρηση/επαλήθευση κατασκευών 2) διερεύνηση κατασκευών και 3) διόρθωση κατασκευών.

Επιπλέον, το Cabri παρέχει τη δυνατότητα εφαρμογής γεωμετρικών μετασχηματισμών, οι οποίοι αποτελούν ένα δυναμικό τρόπο προσέγγισης μαθηματικών εννοιών (Duady & Perrin, 1986).

Το Cabri εμπνέει επίσης δασκάλους να αξιοποιήσουν τα διαφορετικά χαρακτηριστικά του γνωρίσματα για να σχεδιάσουν διαφορετικούς τύπους δραστηριοτήτων μάθησης (Laborde, 2001). Στη βιβλιογραφία έχουν καταγραφεί πολλά είδη δραστηριοτήτων, κατασκευασμένα για το περιβάλλον του Cabri. Ενδεικτικά αναφέρουμε: δραστηριότητες παρατήρησης, διερεύνησης, πειραματισμού, επαλήθευσης.

Το Cabri έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορες φάσεις της διαδικασίας της διδασκαλίας και ως αντικείμενο διδασκαλίας αλλά και ως εργαλείο μάθησης (Laborde, 2001) για την εισαγωγή μιας νέας έννοιας στους μαθητές, την ανακάλυψη ιδιοτήτων μιας έννοιας από τους μαθητές ή την εφαρμογή της έννοιας αυτής σε επίλυση προβλημάτων από τους μαθητές.

#### **Συλλογή Δεδομένων**

Οι πηγές δεδομένων της έρευνας είναι τα ψηφιακά αρχεία Cabri, οι μαγνητοσκοπημένες ενέργειες των μαθητών στο περιβάλλον του Cabri, τα φύλλα εργασίας τους και οι σημειώσεις πεδίου της ερευνήτριας. Το πείραμα καταγράφηκε με τη χρήση του λογισμικού Camtasia.

#### **Ανάλυση Δεδομένων**

Υλοποιήσαμε ποιοτική ανάλυση των ψηφιακών και γραπτών δεδομένων των μαθητών (Cohen et all, 2007). Τα δεδομένα όλων των μαθητών (ψηφιακά και γραπτά) καταχωρήθηκαν ως εσωτερικές πηγές στο λογισμικό ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων NVivo. Τα αρχεία βίντεο Camtasia αναλύθηκαν μέσω παρατήρησης.

#### **Αποτελέσματα Έρευνας**

Οι στρατηγικές σύγκρισης κάθε μαθητή στα ψηφιακά αρχεία εντοπίστηκαν και καταγράφηκαν. Συνολικά εντοπίστηκαν 276 στρατηγικές σύγκρισης (2 έως 13 στρατηγικές σύγκρισης ανά μαθητή). Τα ποιοτικά στοιχεία των δεδομένων της παρέμβασής μας αναλύθηκαν με κριτήριο τα νοητικά σχήματα εργαλειακής δράσης (Bussi & Mariotti, 2008) που ανέπτυξαν οι μαθητές στο πλαίσιο της δραστηριότητας και τα οποία

γίνονται αντιληπτά μέσα από τις τεχνικές σύγκρισης μηκών που κατασκεύασαν οι μαθητές στο περιβάλλον του Cabri Geometry II. Τα σχήματα εργαλειακής δράσης (instrumented action schemes) που αναπτύχθηκαν είναι: 1) **το σχήμα της γεωμετρικής κατασκευής** για έμμεση σύγκριση των μηκών με αξιοποίηση βασικών γεωμετρικών ιδιοτήτων και εννοιών σε συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές. Εδώ προέκυψε ένα σημαντικό σχήμα εργαλειακής δράσης: **το σχήμα της ‘μεγέθυνσης’** μέσω αξιοποίησης του επιπέδου σχήματος ‘κύκλος’ ώστε η σύγκριση μηκών (μονοδιάστατο) να μετασχηματιστεί σε σύγκριση κύκλων (δισδιάστατο σχήμα), όπου η σύγκριση είναι πιο εμφανής, 2) **το σχήμα της κίνησης** με αξιοποίηση της λειτουργίας ‘drag-mode’ για οπτική σύγκριση μέσω δυναμικής διαχείρισης κατασκευών, κυρίως μέσω μετασχηματισμού θέσης ή προσανατολισμού, 3) **το σχήμα της μέτρησης**, με αξιοποίηση εργαλείων αριθμητικών μετρήσεων ή δημιουργίας νέας μονάδας μέτρησης όπως οι κουκίδες πλέγματος για άμεση σύγκριση μέσω μέτρησης ή για επαλήθευση οπτικής σύγκρισης.

Τρεις κατηγορίες στρατηγικών σύγκρισης δημιουργήθηκαν με κριτήριο την τεχνική σύγκρισης που ανέπτυξαν οι μαθητές. Αυτές παρουσιάζονται στον Πίνακα 1 με τα αντίστοιχα σχήματα εργαλειακής δράσης και τις αντίστοιχες συχνότητές τους.

Κατηγορίες στρατηγικών σύγκρισης		
	Σχήμα εργαλειακής δράσης	Συχνότητα
Γεωμετρική προσέγγιση (C1)	σχήμα γεωμετρικής κατασκευής	147
Οπτικο-χωρική προσέγγιση (C2),	σχήμα κίνησης	79
Αριθμητική προσέγγιση (C3)	σχήμα μέτρησης	50

Πίνακας 1: Κατηγορίες στρατηγικών σύγκρισης

Από τα στοιχεία του Πίνακα 1 παρατηρούμε ότι η κατηγορία με τη μεγαλύτερη συχνότητα παρατήρησης είναι η **γεωμετρική προσέγγιση και ακολουθεί η οπτικο-χωρική προσέγγιση**. Η κατηγορία με τη μικρότερη συχνότητα παρατήρησης είναι η αριθμητική προσέγγιση. Δεδομένου ότι η αριθμητική προσέγγιση αποτελεί τη συνήθη σχολική πρακτική, αυτό αποτελεί ένα πρώτο στοιχείο ότι το εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές επηρέασε και διαμόρφωσε τις στρατηγικές δράσης τους. Ο ισχυρισμός μας ενισχύεται περισσότερο από τις κατασκευές στρατηγικών σύγκρισης από τους μαθητές που είναι γεωμετρικής ή οπτικο-χωρικής φύσης όπως και το συγκεκριμένο περιβάλλον. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε αναλυτικά τις στρατηγικές των μαθητών ανά κατηγορία:

(C1) Γεωμετρική προσέγγιση σύγκρισης με αξιοποίηση γεωμετρικών εννοιών, σχημάτων και κατασκευών
<b>C1.1. Κύκλος.</b> 1) Πολλοί μαθητές κατασκεύασαν κύκλους με ακτίνα ή διάμετρο τα ευθύγραμμα τμήματα και προχώρησαν σε σύγκριση κύκλων είτε μέσω οπτικής αντίληψης, είτε μέσω αριθμητικής σύγκρισης των περιμέτρων ή εμβαδών τους. 2) Άλλοι μαθητές μετατόπισαν τα ευθύγραμμα τμήματα ώστε να έχουν κοινή αρχή και στη συνέχεια έκαναν κύκλο με κέντρο την κοινή τους αρχή και ακτίνα ένα από τα τμήματα. Στη συνέχεια παρατήρησαν αν το άλλο τμήμα υπολείπεται ή προεξέχει του κύκλου. 3) Κάποιοι μαθητές τοποθέτησαν τα δύο τμήματα σε κατακόρυφη θέση, εντόπισαν το μέσο της απόστασής τους και έκαναν κύκλο με κέντρο το μέσο, παρατηρώντας ποιο από τα δύο τμήματα θα προεξέχει του κύκλου όταν το άλλο ακολουπά την περιφέρεια του κύκλου.
<b>C1.2. Τρίγωνο</b> 1) Πολλοί μαθητές κατασκεύασαν ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρησαν τις οξείες γωνίες του και σύγκριναν αυτές αντί για τα τμήματα. 2) Άλλοι μαθητές κατασκεύασαν ισοσκελή τρίγωνα με ίσες βάσεις και ύψη τα δοσμένα τμήματα και στη συνέχεια σύγκριναν τα τρίγωνα είτε οπτικά είτε μετρώντας το εμβαδόν τους με το εργαλείο μέτρησης του λογισμικού.
<b>C1.3. Μεσοκάθετος.</b> Πολλοί μαθητές τοποθέτησαν και τα δύο τμήματα σε κατακόρυφο προσανατολισμό και χρησιμοποιώντας το εργαλείο 'μεσοκάθετος' έφεραν τις μεσοκαθέτους στα δύο τμήματα. Στη συνέχεια παρατήρησαν ποια μεσοκάθετος βρίσκεται ψηλότερα ώστε να εντοπίσουν το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα.
<b>C1.4. Βοηθητικές ευθείες</b> 1) Πολλοί μαθητές αρχικά τοποθέτησαν και τα δύο τμήματα σε κατακόρυφο προσανατολισμό. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το εργαλείο για παράλληλες ή κάθετες ευθείες έφεραν παράλληλη ή κάθετη ευθεία από το πάνω άκρο του ενός τμήματος ώστε να δουν αν τέμνει ή όχι το άλλο τμήμα. 2) Άλλοι μαθητές αρχικά τοποθέτησαν και τα δύο τμήματα σε κατακόρυφο προσανατολισμό. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το εργαλείο για ευθείες έφεραν ευθεία που περνούσε από τα άκρα των δύο κατακόρυφων τμημάτων και μελετώντας την κλίση της εντόπισαν το μεγαλύτερο από τα δύο τμήματα.

Οπτική προσέγγιση σύγκρισης (C2)
<b>C2.1. Μετασχηματισμοί προσανατολισμού .</b> 1) Πολλοί μαθητές τοποθέτησαν κατακόρυφα τα δύο ευθύγραμμα τμήματα και προχώρησαν σε άμεση οπτική σύγκριση ή σε άλλες, 2) Ορισμένοι μαθητές αξιοποίησαν το εργαλείο της συμμετρίας για μετασχηματισμό της θέσης του οριζόντιου τμήματος προκειμένου να το τοποθετήσουν παράλληλα προς το άλλο και να συγκρίνουν οπτικά τα τμήματα.
<b>C2.2 Μετασχηματισμοί θέσης:</b> 1) Πολλοί μαθητές αξιοποίησαν το εργαλείο για αντιγραφή- επικόλληση του ενός τμήματος πάνω στο άλλο προκειμένου να τα συγκρίνουν 2) Άλλοι μαθητές αξιοποίησαν τη λειτουργία 'drag-mode' και επέθεσαν το ένα τμήμα πάνω στο άλλο ώστε να έχουν άμεση οπτική σύγκριση των μηκών.

Αριθμητική προσέγγιση σύγκρισης (C3)
<b>C3.1.</b> Αυτόματη αριθμητική μέτρηση μήκους με το αντίστοιχο εργαλείο μέτρησης
<b>C3.2.</b> Νέα μονάδα μέτρησης: ορισμένοι μαθητές αξιοποίησαν τους άξονες και το πλέγμα ώστε να συγκρίνουν τα τμήματα μετρώντας κουκίδες πλέγματος που

### Συζήτηση-Συμπεράσματα

Σύμφωνα με τη θεωρία της εργαλειακής γένεσης, οι μαθητές της έρευνας προσέδωσαν νέες χρήσεις στο τεχνούργημα σχετικά με τη σύγκριση μηκών. Συγκεκριμένα, πέρα από σύγκριση μέσω του εργαλείου αριθμητικής μέτρησης που αποτελεί τη συνήθη στρατηγική σύγκρισης και στο παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας, πολλοί μαθητές της έρευνας αξιοποίησαν το εργαλείο 'κύκλος' προσδίδοντάς του νέα χρήση ως εργαλείο μεγέθυνσης. 56 στρατηγικές δημιουργήθηκαν με αξιοποίηση του εργαλείου για κύκλο από 38 στους 48 μαθητές της έρευνας. Οι μαθητές κατασκεύασαν κύκλους με δομικά στοιχεία (ακτίνες ή διαμέτρους) τα δύο υπό σύγκριση τμήματα. Με αυτό τον τρόπο οι μαθητές μετασχημάτισαν το



πρόβλημα σύγκρισης μηκών σε πρόβλημα σύγκρισης επιπέδων σχημάτων όπου η οπτική σύγκριση είναι εμφανέστερη. Οι μαθητές οδηγήθηκαν σε αυτή τη τεχνική ενδεχομένως λόγω απουσίας εργαλείου μεγέθυνσης στο ε.λ. Cabri Geometry II. Σε πολλές περιπτώσεις αξιοποίησαν ταυτόχρονα και τη λειτουργία 'drag mode' για δυναμική διαχείριση της κατασκευής, καθώς και αριθμητικές μετρήσεις, ενδεχομένως για επαλήθευση των αποτελεσμάτων σύγκρισης μέσω των κατασκευών τους.

Επιπλέον, οι μαθητές προσέδωσαν στο εργαλείο ' τρίγωνο ' νέα χρήση ως εργαλείο σύγκρισης μηκών μέσω της σύγκρισης οξείων γωνιών ορθογωνίου τριγώνου. Οι συγκεκριμένοι μαθητές εκμεταλλεύθηκαν την πρότερη γνώση τους σχετικά με τον κανόνα ότι απέναντι από μεγαλύτερη γωνία τριγώνου βρίσκεται μεγαλύτερη πλευρά.

Παρατηρούμε ότι μαθητές αξιοποίησαν βασικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς (θέσης και προσανατολισμού), καθώς και γεωμετρικά σχήματα (όπως κύκλους και τρίγωνα) και βασικές ιδιότητες αυτών ώστε **να αναπαραστήσουν με διαφορετικό τρόπο τα δύο υπό σύγκριση μεγέθη**, προκειμένου να τα συγκρίνουν, διότι ο αρχικός σχεδιασμός των τμημάτων ήταν εσκεμμένα τέτοιος που να μην επιτρέπει την άμεση σύγκρισή τους.

Επιπλέον, το εργαλείο για ευθείες γραμμές (λοξές, παράλληλες, κάθετες) αξιοποιήθηκε ευρέως από τους μαθητές για κατασκευή ευθειών που λειτούργησαν ως οπτικά όρια κατά τη σύγκριση των τμημάτων (στρατηγικές που εμπίπτουν στην κατηγορία C1). Οι μαθητές υλοποίησαν στρατηγικές σε αυτή την κατηγορία με στόχο να οπτικοποιήσουν τη διαφορά των τμημάτων θέτοντας κάποιο οπτικό όριο στις κατασκευές τους.

Το ε.λ. δυναμικής γεωμετρίας επηρέασε και διαμόρφωσε τον τρόπο σκέψης των μαθητών και τις ενέργειές τους ωθώντας τους στη δημιουργία τεχνικών σύγκρισης σύμφωνα με τις γεωμετρικές και οπτικο-χωρικές του δυνατότητες αλλά παράλληλα και σύμφωνα με τους περιορισμούς του. Για παράδειγμα, το ε.λ. δεν διαθέτει εργαλείο αλλαγής κλίμακας για μεγέθυνση. Έτσι, παρατηρούμε ότι οι μαθητές επινόησαν τρόπο μεγέθυνσης μέσω του εργαλείου για κύκλους.

Τέλος, το τεχνολογικό εργαλείο ώθησε τους μαθητές στην οικοδόμηση του 'σχήματος της κίνησης' (αξιοποιώντας τη λειτουργία drag-mode) που διαμορφώθηκε ως τεχνική σύγκρισης μέσω αλλαγής προσανατολισμού ή αλλαγής θέσης των τμημάτων (στρατηγικές της κατηγορίας C2).

Οι νέες χρήσεις που προσέδωσαν οι μαθητές στο ε.λ. είναι συμβατές με τις απαιτήσεις του έργου που εμπλέξαμε τους μαθητές της έρευνας. Το φυσικό εργαλείο (ε.λ. Cabri Geometry II) λειτούργησε ως γνωστικό όργανο,

το οποίο βοήθησε τους μαθητές να οικοδομήσουν συγκεκριμένα νοητικά σχήματα για την έννοια της σύγκρισης μηκών.

Συνοψίζοντας, οι δυνατότητες και οι περιορισμοί του οργάνου επηρέασαν τόσο τις στρατηγικές σύγκρισης μηκών τμημάτων που ανέπτυξαν οι μαθητές στο πλαίσιο της συγκεκριμένης δραστηριότητας, όσο και τις αντίστοιχες αντιλήψεις τους σχετικά με τη σύγκριση μηκών (instrumentation), ενώ ταυτόχρονα η γνώση των μαθητών κατεύθυνε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήθηκε το ε.λ. και κατά μια έννοια διαμόρφωσε και εμπλούτισε τις χρήσεις του (instrumentalization).

Δεδομένου ότι η σύγκριση αποτελεί βασική υπο-έννοια της αφηρημένης έννοιας της ανισότητας, η προτεινόμενη διδακτική παρέμβαση μπορεί να αποτελέσει πρόταση για εισαγωγή σε γεωμετρική προσέγγιση της έννοιας της ανισότητας με αξιοποίηση δυναμικών γεωμετρικών ψηφιακών εργαλείων πολλαπλών αναπαραστάσεων με δυνατότητα οπτικοποίησης.

## 6. Βιβλιογραφία

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Balomenou, A. & Kordaki, M. (2009). Multiple Solution Tasks within Dynamic Geometry Systems. In *Educattia 21*, no54, Special Volume: *Virtual Instruments and tools in Sciences Education: Experiences and Perspectives*, pp. 71-78 (BDI: Fachportal Paedagogik, Germania). ISSN: 1841 - 0456
- Bussi, MGB., Mariotti, M. A., (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of International Research in Mathematics Education (LEA, USA)*, 2nd revised edition.
- Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics*, 99(1), 5-11.
- Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th ed), *Routledge Publishers*, Oxford, UK.
- Douady, R., Perrin, M-J. (1986). 'Concerning conceptions of area (students aged 9 to 11)', *Proceedings of the 10th International Conference, Psychology of Mathematics Education*, pp. 253-258, London, England.

- Guin, D., Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *ZDM*, Vol. 34 (5).
- Guin, D., Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3: 195–227.
- Healy, L., Hoyles, C., & Laborde, J. M. (2001). Teaching and learning dynamic geometry. *Editorial in the special issue on the subject in the JCML*, 6(3).
- Noss, R. and Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning Cultures and Computers*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Kieran, C., Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International journal of computers for mathematical learning*, 11(2), 205-263.
- Laborde, C. (2001). 'Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry'. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6(3), 283-317.
- Rabardel, P. (1995): *Les hommes & les technologies. Approche cognitive des instruments contemporaines* Ed.: A. Colin Paris.
- Rabardel, P., & Samuçay, R. (2001). From artifact to instrumented-mediated learning, New challenges to research on learning. *International symposium organized by the Center for Activity Theory & Developmental Work Research*, University of Helsinki, March 21–23.
- Trouche, L. (2003). From artifact to instrument: mathematics teaching mediated by symbolic calculators. *Interacting with computers*, 15(6), 783-800.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts. A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.
- Zacharos, K., (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior* 25, 224–239.