Η ΑΝΙΣΗ ΜΕΤΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ: ΑΠΟ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΝΝΟΙΑ ΣΕ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΣΧΟΛΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Αθανασία Μπαλωμένου,
υποψήφια διδάκτωρ ΤΕΕΑΠΗ, Πανεπιστήμιο Πατρών,
smpalom@upatras.gr
Βασίλειος Κόμης,
Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ,
komis@upatras.gr
Κωνσταντίνος Ζαχάρος,
Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ,
zacharos@upatras.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η ανισότητα αποτελεί από την αρχαιότητα σημαντική μαθηματική έννοια η οποία επιστημονικά προσεγγίζεται ως πολύτιμο εργαλείο σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών και άλλων επιστημών. Δεδομένης της σημασίας της, κρίνεται σκόπιμος ο διδακτικός μετασχηματισμός της ανισότητας από επιστημονική γνώση σε αντικείμενο διδασκαλίας. Στο Ελληνικό Γυμνάσιο ο μετασχηματισμός αυτός επιτελείται μέσα από την έννοια της ανίσωσης, χωρίς όμως να αποσαφηνίζονται ρητά οι δύο έννοιες ‘ανισότητα’ και ‘ανίσωση’. Συχνά οι δύο αυτές λέξεις θεωρούνται συνώνυμες, ακόμα και από εκπαιδευτικούς Μαθηματικών. Διδακτικά η ανίσωση εισάγεται λειτουργικά ως διαδικασία ανάλογη της επίλυσης εξίσωσης πρώτου βαθμού με ένα άγνωστο. Η προσέγγιση αυτή λειτουργεί συχνά ως γνωστικό εμπόδιο για τους μαθητές οι οποίοι οδηγούνται σε παρανοήσεις και λάθη, δεδομένου ότι δεν έχουν προηγουμένως δομικά κατανοήσει την έννοια της ανισότητας ώστε να είναι σε θέση να διαχειρίζονται αποτελεσματικά ανισοτικά σχήματα. Μια πρόταση διδακτικού μετασχηματισμού της ανισότητας ώστε αρχικά να οικοδομείται η έννοια της ανισότητας και εν συνεχεία οι μαθητές να διαπραγματεύονται

ανισώσεις είναι το αντικείμενο ερευνητικής μας ενασχόλησης που βρίσκεται σε διαδικασία αξιολόγησης.

ABSTRACT

Inequality is an important mathematical concept since ancient times that is approached as a valuable tool in all branches of mathematics and other sciences. Due to its importance, inequality is didactically transformed into a subject of teaching at school level. In Greek Junior high school, the transformation is accomplished through the notion of inequation without explicitly clarifying the two concepts 'inequality' and 'inequation'. Often these two words are considered synonymous, even from teachers of Mathematics. The inequation is introduced as an operating process, secondary to the equation. This approach of inequations through equations often acts as a cognitive obstacle for students that leads to misconceptions and mistakes, as they don't have previously structurally understand the concept of inequality, in order to be able to effectively manage inequality schemes. A proposal of didactic transposition of inequality in a way that students initially build the concept of inequality, by exploiting computational tools and only then negotiate with inequations is ongoing.

Λέξεις κλειδιά: ανισότητα, ανίσωση, ιστορική προσέγγιση, διδακτικός μετασχηματισμός.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανισότητα είναι μια σημαντική αφηρημένη μαθηματική έννοια. **Επιστημονικά** χρησιμοποιείται στον τομέα της Άλγεβρας και της Μαθηματικής Ανάλυσης (Hardy et. al., 1934, p.p. 4-5) ως πολύτιμο εργαλείο για τα θεωρητικά και εφαρμοσμένα μαθηματικά και για άλλους επιστημονικούς κλάδους.

Η κατανόηση της έννοιας της ανισότητας από τους μαθητές είναι πολύ σημαντική για την επιτυχία τους στα Μαθηματικά, δεδομένου ότι πολλές διδακτικές ενότητες του σχολικού αναλυτικού προγράμματος σπουδών στηρίζονται στην έννοια της ανισότητας (επίλυση ανισώσεων, σύγκριση αριθμών, σχετική θέση συναρτήσεων, πρόσημο τριωνύμου και ρητών αλγεβρικών παραστάσεων, έννοια του ορίου, ολοκληρώματα κ.α.).

Παρά τη σημασία της, η ανισότητα στο Ελληνικό Γυμνάσιο του 21ου αιώνα δεν αποτελεί ξεκάθαρα αποσαφηνισμένη και θεωρητικά θεμελιωμένη έννοια. **Διδακτικά** μετασχηματίζεται στην έννοια της ανίσωσης, η οποία στα Μαθηματικά του Γυμνασίου προσεγγίζεται ως αλγοριθμικό ανάλογο της επίλυσης εξίσωσης πρώτου βαθμού. Η μελέτη της βιβλιογραφίας όμως δείχνει ότι αυτή η διαδικασία προκαλεί σύγχυση και παρανοήσεις στους μαθητές (Βερύκιος, 2010), οι οποίοι, χωρίς να έχουν το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο σχετικά με ανισότητες, καλούνται να εφαρμόσουν διαδικασίες όπως ιδιότητες διάταξης, διαχείριση προσήμων σε ανισότητες κ.α. Αυτό δεν ευνοεί την κατανόηση, αντιθέτως υποστηρίζει τη μηχανιστική προσέγγιση της γνώσης ξεκομμένης από το πλαίσιο ανάπτυξής της.

Στην παρούσα εργασία διερευνούμε το διδακτικό μετασχηματισμό της έννοιας της ανισότητας από επιστημονικό αντικείμενο σε σχολική γνώση μέσα από την ιστορική εξέλιξη της έννοιας.

Συγκεκριμένα, αξιοποιούμε αρχικά την ιστορική προσέγγιση ως εργαλείο επιχειρώντας: α) να καταδείξουμε ότι οι όροι *«ανισότητα»* και *«ανίσωση»* αποτελούν διαφορετικές έννοιες, με την ανίσωση να αποτελεί υποέννοια της ανισότητας, β) να απαντήσουμε «πώς» και «γιατί» η έννοια της ανισότητας στα σχολικά μαθηματικά μετασχηματίζεται διδακτικά στην έννοια της ανίσωσης, γ) να διερευνήσουμε κατά πόσο αυτή η διαδικασία επιφέρει το προσδοκώμενο διδακτικό αποτέλεσμα ως προς την κατανόηση της έννοιας της ανισότητας από τους μαθητές. Τέλος, εισηγούμαστε μια πρόταση **διδακτικού μετασχηματισμού** της ανισότητας με τρόπο ώστε αφενός να αναδεικνύεται η σπουδαιότητα της έννοιας σε σχολικό επίπεδο, αφετέρου να αναδεικνύεται ως αυτοτελής ενότητα του αναλυτικού προγράμματος σπουδών του Γυμνασίου, πλαισιωμένη από το απαιτούμενο θεωρητικό υπόβαθρο σχετικά με τη διάταξη και τη σύγκριση όπου οι ανισώσεις θα αντιμετωπίζονται ως υποέννοια.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας με αξιοποίηση υπολογιστικών εργαλείων πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία της έννοιας της ανισότητας στα μαθηματικά του Γυμνασίου, η οποία βρίσκεται σε διαδικασία αξιολόγησης.

2. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ

2.1. Εννοιολογικές αποσαφηνίσεις για την ανισότητα

Σύμφωνα με την Εγκυκλοπαίδεια των Μαθηματικών (http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Inequality&oldid=15617), «*ανισότητα είναι μια σχέση που συνδέει δύο πραγματικούς αριθμούς* α_1 *και* α_2 *με ένα από τα σύμβολα:* $<$*(μικρότερο από),* $\leq$ *(μικρότερο ή ίσο από),* $>$*(μεγαλύτερο από),* $\geq$ *(μεγαλύτερο ή ίσο από),* $\neq$*(διάφορο), δηλαδή,* $\alpha_1 < \alpha_2$*,* $\alpha_1 > \alpha_2$*,* $\alpha_1 \leq \alpha_2$*,* $\alpha_1 \geq \alpha_2$*,* $\alpha_1 \neq \alpha_2$».

Σύμφωνα με τον Luis Brant (Ανδρέου κ.α. 1984, σελ. 13): *'η ανισότητα στα Μαθηματικά, εκτός από τη σύγκριση, περιέχει και την έννοια της διάταξης. Ένα σύνολο λέγεται διατεταγμένο αν υπάρχει μια σχέση τέτοια* *ώστε: Όταν* $\alpha \neq \beta$, $\alpha < \beta$ *ή* $\beta < \alpha$ *και* $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ *συνεπάγεται* $\alpha < \gamma$. *Επομένως, π.χ., οι ακέραιοι επί μιας ευθείας γραμμής είναι διατεταγμένοι, όπου το < σημαίνει «προηγείται» (ένα σημείο Α προηγείται του Β επί μιας ευθείας με φορά όταν το Α βρίσκεται στην «αρνητική» πλευρά του Β)*'.

Τέλος, η έννοια της ανισότητας περιέχει την έννοια του «περιέχεσθε», τόσο στη Γεωμετρία: *«Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν]», (Ευκλείδης, Στοιχεία, Κοιναί Ἔνοιαι, η΄),* όσο και στη Θεωρία Συνόλων (έννοια του υποσυνόλου).

Η έννοια της ανισότητας, ως μαθηματική έννοια, ορίζεται και στα λεξικά γενικής χρήσης, όπως π.χ. στο λεξικό Μπαμπινιώτη (2008, σελ. 190) ως: «*η σχέση μεταξύ δύο στοιχείων ενός συνόλου (π.χ. αριθμών, μεγεθών κ.λ.π.) η οποία δηλώνει ότι το ένα είναι 'μεγαλύτερο' ή 'μικρότερο' του άλλου».* Η ανίσωση ορίζεται ως: «*η ανισότητα που περιέχει μια ή περισσότερες μεταβλητές»* (Μπαμπινιώτης, 2008, σελ. 191). Στο ηλεκτρονικό λεξικό της κοινής ελληνικής (Πύλη της Ελληνικής Γλώσσας) η ανισότητα ορίζεται ως «*η [anisótita] O28 : ... || (μαθημ.) η ποσοτική διαφορά μεταξύ δύο αριθμών ή μεγεθών και η γραφική παράστασή της.*» και η ανίσωση «η [anísosi] O33 : (μαθημ.) *ανισότητα που περιέχει μία ή περισσότερες μεταβλητές.*». Άρα η ανισότητα αποτελεί ευρύτερη έννοια η οποία περιλαμβάνει την ανίσωση ως ειδική περίπτωση.

2.2. Ιστορική προσέγγιση στα μαθηματικά

Η ιστορική προσέγγιση μπορεί να παίξει καθοριστικό ρόλο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών (Heiede, 1996), δίνοντας τη δυνατότητα της θεώρησης των Μαθηματικών ως μιας εξελικτικής διανοητικής διαδικασίας και συνεχούς δραστηριότητας των ατόμων και όχι ως ένα στατικό παραγόμενο, δομημένο a priori (Grugnetti & Rogers, 2000).

Σύμφωνα με την κοινωνικο-πολιτιστική προσέγγιση του L. Radford (1997), η γνώση συνδέεται με δραστηριότητες των ατόμων οι οποίες είναι άμεσα συνδεδεμένες με το ευρύτερο κοινωνικο-πολιτιστικό συγκείμενο. Ο ρόλος που διαδραματίζει η ιστορία είναι να ερμηνεύει με αναφορά σε διαφορετικές κοινωνικο-πολιτισμικές καταστάσεις (Radford, 2003) και να μας δίνει τη δυνατότητα για κριτική μελέτη επιστημονικών εννοιών σε διάφορες ιστορικές περιόδους, σύμφωνα με τις ανάγκες κάθε εποχής και σε συνάρτηση με την εξέλιξη των λοιπών επιστημονικών κλάδων. Οι ειδικοί (ερευνητές, συγγραφείς αναλυτικών προγραμμάτων, βιβλίων κ.α.) αξιολογούν, σύμφωνα με το εκάστοτε κοινωνικο-πολιτισμικό πλαίσιο, ποιες από αυτές χρειάζεται να εισαχθούν στη σχολική γνώση και με ποιο τρόπο.

2.3. Διδακτικός Μετασχηματισμός

Ο όρος *διδακτικός μετασχηματισμός (transposition didactique)* χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στη Διδακτική από τον Yves Chevalard (1985), στα πλαίσια της Διδακτικής των Μαθηματικών. Με τον όρο αυτό οριοθετούνται οι γενικοί μηχανισμοί που επιτρέπουν το πέρασμα από ένα «αντικείμενο επιστημονικής γνώσης» σε ένα «αντικείμενο διδασκαλίας». Ο Chevalard, ξεκινώντας από τη διάκριση ανάμεσα στην «επιστημονική Γνώση» (όπως αυτή παράγεται από την επιστημονική έρευνα) και στη «διδαχθείσα Γνώση» (όπως αυτή μπορεί να παρατηρηθεί στη σχολική πρακτική) ορίζει τον διδακτικό μετασχηματισμό ως: *«ένα περιεχόμενο γνώσης το οποίο έχοντας ορισθεί ως διδακτέα γνώση, υπόκειται σε ένα σύνολο από προσαρμοστικούς μετασχηματισμούς που το καθιστούν ικανό να πάρει θέση ανάμεσα στα αντικείμενα διδασκαλίας»* (Κόμης, 2000, σελ. 28).

Ο Chevallard (1985) υπογραμμίζει ότι τα «αντικείμενα διδασκαλίας» δεν προέρχονται σε καμία περίπτωση από «απλουστεύσεις» πιο σύνθετων αντικειμένων της επιστημονικής κοινότητας. Είναι, αντιθέτως, το αποτέλεσμα μιας διδακτικής προσπάθειας, μιας αποσύνθεσης, μιας κατασκευής, που τα κάνει να διαφέρουν ποιοτικά από την αντίστοιχη επιστημονική έννοια (Joshua & Dupin, 1993). Συνεπώς, το πέρασμα από την επιστημονική γνώση στη διδαχθείσα γνώση δεν είναι ποτέ άμεσο. Ο μετασχηματισμός επιτυγχάνεται μέσα από δύο στάδια. Αρχικά επιτελείται μια διαδικασία εξωτερικού μετασχηματισμού με τη 'νοόσφαιρα' να αποτελεί τον ενδιάμεσο μεταξύ συστήματος διδασκαλίας και του ευρύτερου κοινωνικού περιβάλλοντος (Κόμης, 2000, σελ. 28). Στο δεύτερο στάδιο έχουμε τη διαδικασία του εσωτερικού μετασχηματισμού. Είναι το στάδιο όπου ο δάσκαλος μπορεί να κάνει τις δικές του παρεμβάσεις οι οποίες όμως είναι περιορισμένες σε σχέση με το πρώτο στάδιο όπου ουσιαστικά επιτελείται το μεγαλύτερο μέρος του διδακτικού μετασχηματισμού.

3. ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΕΞΕΛΙΞΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ

Η έννοια *ανισότητα* είναι πολυσήμαντη και προσδιορίζεται κάθε φορά μέσα από το πλαίσιο στο οποίο χρησιμοποιείται (κοινωνία, οικονομία, μαθηματικά κ.α.). Σε κείμενα του Αριστοτέλη (384-322 π.χ.) αναφέρεται: ***«Δεν υπάρχει τίποτε πιο άνισο από την ίση μεταχείριση των άνισων»*** (Δαλέζιος & Κυργιόπουλος, 1990).

Η ανισότητα ως επιστημονική έννοια εντοπίζεται από την αρχαιότητα και στα Μαθηματικά. Ιστορικά, εντοπίζεται σε αρχαία κείμενα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η αναγκαιότητα της εννοιολογικής κατασκευής της ανισότητας πήγαζε από τη διερεύνηση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων ή μεγεθών που απεικονιζόταν σε χειρόγραφες εκφράσεις ή σχέδια.

Ήδη από την εποχή του Ευκλείδη (323 π.χ. – 283 π.χ.) στα αρχαία μαθηματικά κείμενα «Στοιχεία» συναντάμε αξιώματα, κοινές έννοιες και προτάσεις με την έννοια της ανισότητας. Ενδεικτικά αναφέρουμε την τριγωνική ανισότητα η οποία συναντάται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, Βιβλίο Α΄, Πρόταση 20η: *«Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσί παντή μεταλαμβανόμεναι»*. Σε άλλο σημείο στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη (4η κοινή έννοια) αναφέρεται ότι: *«...και εάν σε άνισα προστεθούν ίσα, τα αθροίσματα είναι άνισα».(Κοιναί Ἔνοιαι δ΄. «Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα»).* Παρόλα αυτά, και ενώ ο Ευκλείδης φροντίζει να θεμελιώσει αυστηρά την έννοια της ισότητας στις κοινές έννοιες 1, 2, 3, εντούτοις δεν κατοχυρώνει αξιωματικά και την έννοια της ανισότητας και τις ιδιότητες της διάταξης. Η ανισότητα θεμελιώνεται στα «Στοιχεία» μόνο μέσα από την έννοια του «περιέρχεσθαι» στην κοινή έννοια 8: *«το όλον είναι μεγαλύτερο του μέρους»* (Ευκλείδης, Στοιχεία, Κοιναί Ἔνοιαι, η΄: *Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν]).*

Η έννοια της ανισότητας περνάει από τη Γεωμετρία στην Άλγεβρα τον 3ο μ.χ. αιώνα όπου τότε προσδιορίζεται χρονολογικά η εμφάνιση της Άλγεβρας ως αυτοτελούς κλάδου των Μαθηματικών και ακολουθεί ιστορικά την εξέλιξη της άλγεβρας μέσα από τρία στάδια, τα οποία περιγράφονται το 1842 από τον G.H.F. Nesselmann (Serfati, 1997):

1) *Ρητορική άλγεβρα (rhetorical algebra):* 3ος -15ος αιώνας. Είναι η άλγεβρα των λέξεων. Οι μαθηματικές προτάσεις εκφράζονται σε φυσική γλώσσα. Η ανισότητα ενυπάρχει στα μαθηματικά σε φυσική γλώσσα χωρίς σύμβολα.

2) *Συγκεκομμένη άλγεβρα* (syncopated algebra): είναι η άλγεβρα του 15ου και 16ου αιώνα όπου περιλαμβάνει σύμβολα και λέξεις: συντομεύσεις λέξεων και ειδικά μαθηματικά σύμβολα αναμειγνύονται με τη φυσική γλώσσα. Είναι μόλις τον 16ο αιώνα που επινοείται για πρώτη φορά το σύμβολο της ισότητας (Lakoff & Núñez, 2000, p. 376), ενώ εξακολουθεί να μην υπάρχει σύμβολο για την ανισότητα. 3) *Άλγεβρα των συμβόλων* (symbolic algebra): είναι η δομημένη άλγεβρα με σύμβολα, μεταβλητές, παραμέτρους και τελεστές. Ο Γάλλος μαθηματικός François Viète (Φραγκίσκος Βιετά, 1540-1603 μ.χ.), εισάγει πρώτος τη χρήση γραμμάτων ως παραμέτρων σε εξισώσεις και θέτει τα θεμέλια της σύγχρονης άλγεβρας.

Τον 17ο αιώνα (1631) ο μαθηματικός Harriot εξοικειωμένος με τον συμβολικό συλλογισμό του François Viète επινοεί τα σύμβολα της ανισότητας: $<$ και $>$. Τον 18ο αιώνα ο μαθηματικός Pierre Bouguer επινοεί τα σύμβολα $\leq$ και $\geq$.

Η συστηματική ερευνητική μελέτη της ανισότητας ως επιστημονικής έννοιας όμως δεν έχει μεγάλη ιστορία και παρελθόν. Η πρώτη μονογραφία σχετικά με ανισότητες εκδίδεται το 1934: *«Inequalities»* από τους Hardy, Littlewood και Polya (Hardy et al., 1952). Οι συγγραφείς της μονογραφίας δήλωσαν: *«οι ιστορικές και βιβλιογραφικές αναφορές είναι δύσκολες σε ένα θέμα όπως οι ανισότητες, το οποίο έχει εφαρμογές σε κάθε τομέα των Μαθηματικών,* ***αλλά δεν έχει ποτέ αναπτυχθεί συστηματικά»,*** (Hardy et al., 1952, σελίδα v). Άρα, μέχρι το 1934 η ανισότητα χρησιμοποιούταν ευρέως ως εργαλείο σε διάφορες επιστήμες, όμως ως αυτόνομη μαθηματική έννοια, σύμφωνα με τους συγγραφείς, αναπτύσσεται συστηματικά από τότε.

4. ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ

Η ανισότητα εισάγεται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών (Α.Π.Σ.) του Ελληνικού Γυμνασίου με το Βασιλικό Διάταγμα (Β.Δ.) 1897β/17-11-1897) στην Γ΄ τάξη του Γυμνασίου με το κεφάλαιο: *'περί ανισοτήτων και απροσδιορίστου αναλύσεως'*. Η ανισότητα μελετάται ως αυτόνομη έννοια σε θεωρητικό επίπεδο. Με το Β.Δ./21-9-1900, τροποποιείται το προηγούμενο Α.Π.Σ. Η ανισότητα εξακολουθεί να διδάσκεται στην Γ τάξη του Γυμνασίου σε αυτόνομο κεφάλαιο: *«περί ανισότητος»*. Στο Β.Δ./5-10-1906, εισάγεται το κεφάλαιο: *«Περί ανισοτήτων. Απλούσταται ιδιότητες αυτών»*. Ακολουθούν τα όρια, οι ασύμμετροι αριθμοί , ρίζες, δυνάμεις και εξισώσεις 2ου βαθμού και τέλος η *λύσις ανισοτήτων 1ου και 2ου βαθμού.* Μέχρι το 1962 στο Α.Π.Σ. αναφέρεται μόνο η λέξη *«ανισότητα»*. Η λέξη *«ανίσωση»* εμφανίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο της Β΄ γυμνασίου το 1969 (Γραφάκος 1969): *Ανίσωσις ως προς χ είναι μια ανισότις περιέχουσα τον άγνωστο χ»*. Τρεις διαφορετικές διδακτικές προσεγγίσεις της ανίσωσης αναφέρονται από το 1969 έως σήμερα στα σχολικά εγχειρίδια: 1)συναρτησιακή (1978, Γ Γυμνασίου), 2)προτασιακή (1983, Β Γυμνασίου), και 3)αλγοριθμική προσέγγιση ανάλογη της επίλυσης εξισώσεων α βαθμού (Β΄ Γυμνασίου). Στο ελληνικό Α.Π.Σ. των Μαθηματικών του Γυμνασίου η άλγεβρα είναι δομημένη κυρίως γύρω από την έννοια της εξίσωσης (Βερύκιος, 2010, σελ. 48). Ως εκ τούτου, και ο εξωτερικός διδακτικός μετασχηματισμός της έννοιας της ανισότητας γίνεται μέσα από την έννοια της εξίσωσης. Η επιστημονική γνώση περί ανισοτήτων μετασχηματίζεται σε **διδακτέα γνώση** στηριζόμενη αρχικά στην αλγοριθμική διαδικασία επίλυσης ανισώσεων πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο. Οι μαθητές διδάσκονται αλγεβρικούς κανόνες για τη διαχείριση ανισώσεων ανάλογους με τους κανόνες για επίλυση εξισώσεων, χωρίς όμως οι έννοιες ανισότητα και ανίσωση να είναι ξεκάθαρα αποσαφηνισμένες. Το παράδοξο είναι ότι η έννοια της ανισότητας χρησιμοποιείται στον ορισμό της ανίσωσης: *«Μια ανισότητα που περιέχει ένα άγνωστο x, λέγεται ανίσωση με έναν άγνωστο»* (Βιβλίο Μαθηματικών Β΄ Γυμνασίου, σελ 33), χωρίς όμως προηγουμένως να έχει αποσαφηνιστεί θεωρητικά ως έννοια.

Ως εκ τούτου, η ένταξη της έννοιας της ανισότητας στη σχολική γνώση επιτελείται **λειτουργικά ως διαδικασία**, σε μια λογική απόκτησης από τους μαθητές συμβολικών χειριστικών δεξιοτήτων ώστε να μπορούν μηχανιστικά να διαχειρισθούν ανισώσεις και **όχι δομικά ως αντικείμενο**. Κατά το στάδιο του εσωτερικού μετασχηματισμού ο εκπαιδευτικός, καθοδηγούμενος από το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα, και στηριζόμενος στο υπάρχον σχολικό εγχειρίδιο, μετατρέπει τη διδακτέα γνώση σχετικά με τις ανισώσεις σε διδαχθείσα γνώση μέσα από μια αλγοριθμική προσέγγισή της. Η διδαχθείσα γνώση που οικοδομεί ο μαθητής είναι αναποτελεσματική διότι δεν συνδέεται με δομική κατανόηση της έννοιας, γίνεται μηχανιστικά και δεν αντιστοιχεί σε κάποια συγκεκριμένη νοητική αναπαράσταση για τους μαθητές (Baturo & Nason, 1996, σελ. 257). Κατά συνέπεια, οι μαθητές δεν είναι σε θέση να διαχειριστούν ανισότητες που δεν ταιριάζουν σε προκαθορισμένα αλγοριθμικά σχήματα. Ακόμα και αν εφαρμόσουν επιτυχώς τον αλγόριθμο επίλυσης ανισώσεων α' βαθμού, συχνά δεν είναι σε θέση να αιτιολογήσουν τις ενέργειές τους. Ως εκ τούτου, οι μαθητές αποτυγχάνουν να διαχειριστούν αποτελεσματικά θέματα που σχετίζονται με ανισότητες (Tsamir et al., 1998; Tsamir & Bazzini, 2002; Tsamir & Bazzini, 2001).

Μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον σχετικά με τη διδακτική των ανισοτήτων ανέκυψε στο 22ο Συνέδριο PME (Psychology of Mathematics Education, 1998) με αφορμή εισήγηση των Tirosh και Tsamir (1998). Το 1999 στην 23η συνάντηση PME διατυπώνεται πρόταση/πρόσκληση για συστηματική ερευνητική μελέτη των ανισοτήτων.

Με την ερευνητική μας εργασία εισηγούμαστε το διδακτικό μετασχηματισμό της έννοιας της ανισότητας απο-πλαισιωμένο αρχικά από την έννοια της εξίσωσης και σε συνδυασμό με την αναδιάταξη του ισχύοντος αναλυτικού προγράμματος της άλγεβρας με τρόπο ώστε αφενός η ανισότητα να αποτελεί αυτόνομη ενότητα του αναλυτικού προγράμματος, αφετέρου η έννοια της ανίσωσης να προσεγγίζεται στην ενότητα των ανισοτήτων. Μια τέτοια προσέγγιση υποστηρίζουμε ότι θα συντελούσε στην κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές και θα περιόριζε παρανοήσεις και λάθη που παρατηρούνται κατά την εμπλοκή των μαθητών με τον αλγόριθμο επίλυσης ανισώσεων α βαθμού, όπως η ερμηνεία των λύσεων, η αλλαγή της φοράς όταν διαιρούμε με αρνητικό αριθμό κ.α. Άρα, κρίνεται διδακτικά σκόπιμο να ακολουθείται η στρατηγική: από το γενικό (που είναι η ανισότητα) στο ειδικό (που είναι η ανίσωση).

Τέλος, μια πρόταση διδακτικής παρέμβασης σχετικά με την έννοια της ανισότητας με αξιοποίηση υπολογιστικών εργαλείων πολλαπλών εξωτερικών αναπαραστάσεων αποτελούν πεδίο προς διερεύνηση σε ευρύτερη έρευνά μας η οποία είναι σε εξέλιξη.

5.ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Η ιστορική μελέτη της εξέλιξης της έννοιας της ανισότητας αναδεικνύει ότι η ανισότητα αποτελεί σημαντική μαθηματική έννοια που ανιχνεύεται και υποστηρίζει ως εργαλείο πολλούς κλάδους των Μαθηματικών και άλλων επιστημών, ήδη από την εποχή του Ευκλείδη. Συνεπώς κρίνεται σκόπιμος ο διδακτικός μετασχηματισμός της από επιστημονική έννοια σε σχολική γνώση. Η σύγχρονη έρευνα σχετικά με τις ανισότητες που ξεκίνησε μόλις το 1998 με τις πρώτες δημοσιεύσεις στο συνέδριο PME και από τότε είναι σε εξέλιξη, οδηγεί μεταξύ άλλων στο συμπέρασμα ότι ο διδακτικός μετασχηματισμός της ανισότητας μέσω της ανίσωσης α’ βαθμού, ως αλγοριθμικό ανάλογο της επίλυσης εξισώσεων α’ βαθμού οδηγεί σε παρανοήσεις, σύγχυση και δυσκολία διαχείρισης και αιτιολόγησης ανισοτικών σχημάτων από μαθητές. Ως εκ τούτου, εισηγούμαστε τον διδακτικό μετασχηματισμό της έννοιας της ανισότητας σε ένα διαφορετικό πλαίσιο: ως αυτόνομης διδακτικής ενότητας, ώστε οι μαθητές να οδηγούνται σε δομική κατανόηση της έννοιας και στη συνέχεια να οικοδομούν διαδικασίες διαχείρισης ανισοτικών σχέσεων και ανισώσεων, ως εφαρμογή του θεωρητικού πλαισίου της ανισότητας.

6.ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

6.1.Ξενόγλωσση

Baturo, A. Nason, R. (1996).*‘Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement’*, Educational Studies in Mathematics 31, 235-268.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Grugnetti, L., Rogers, L. (2000). *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues,* Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), History in Mathematics Education, Kluwer, Dodrecht, 39-62.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and Pólya, G. (1952) *Inequalities,* (2nd ed.) Cambridge University Press.

Heiede, T. (1996). History *of Mathematics and the Teacher*, Calinger, R. (Ed.). The Mathematical Association of America, 231-243.

Radford, L. (1997). *On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics*, For the Learning of Mathematics, 17(1), 26-33.

Radford, L. (2003). *On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought*, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, Legas, Ottawa, 49-79.

Serfati, M. (1997), La constitution de l'écriture symbolique mathématique, Thèse de doctorat de l'Université Paris 1.

Tsamir, P., Tirosh, D. & Almong, N. (1998), *Students' solutions of inequalities*, PME-22, 129-136.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2002). *Algorithmic models: Italian and Israeli students' solutions to algebraic inequalities*. In A.D. Cockburn, & E. Nardi (Eds.), Proc. Of PME 26, Norwich: UK. 4, 289-296.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2001). *Can x=3 be the solution of an inequality? A study of Italian an Israeli students.* In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proc. of the 25th Annual Meeting for PME, Holland. 4, 303-310.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Tiano, S. (2004). *New errors and old errors: The case of quadratic inequalities.* Proc. of the 28th Conference of the International Group of PME, Bergen, Norway, 1, 155-158.

6.2. Ελληνική

Ανδρέου, Η., Δάσιος, Γ., Ζαφειροπούλου, Φ., Καδιανάκης, Ν., Κόκκινος, Χ., Κυριακή, Κ. (1984). Μαθηματική Ανάλυση (Louis Brant). Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Εκδόσεις: Συμεών.

Βερύκιος, Π., (2010). Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών μαθηματικών εννοιών στο Γυμνάσιο. Διδακτορική διατριβή.

Δαλέζιος, Α. Κυργιόπουλος, Ν. (1990). Αριστοτέλους Μετά τα Φυσικά, Τόμος Β. Εκδόσεις: Πάπυρος. ISBN: 9780008498092.

Ευκλείδη Στοιχεία. Κέντρο Έρευνας Επιστήμης και Εκπαίδευσης. Τόμος Ι. (on-line: commonmaths.weebly.com/uploads/8/4/0/9/8409495/tomos-1.pdf)

Κόμης, Β. (2000). *Η έννοια του διδακτικού μετασχηματισμού στη διδακτική της Πληροφορικής*. Βάση, τεύχος 2, Μάιος 2000, σελ. 23-34.

Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, (2002). Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα.

Μπαμπινιώτης, Γ., (2008). Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας. Γ΄ Έκδοση. Κέντρο Λεξικολογίας. Αθήνα.

Πύλη της Ελληνικής Γλώσσας, ηλεκτρονικό λεξικό της κοινής ελληνικής.