



ΠΡΑΚΤΙΚΑ

7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης
Ερευνητών της Διδακτικής των
Μαθηματικών (Εν.Ε.Δι.Μ.)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

1, 2 & 3 Δεκεμβρίου 2017

-
- ✓ ΈΝΩΣΗ ΕΡΕΥΝΗΤΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ (Εν.Ε.Δι.Μ.)
 - ✓ ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΚΠΑ
 - ✓ ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ-ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ "ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ", ΕΚΠΑ
-

Επιμέλεια:

Θ. Ζαχαριάδης, Δ. Πόταρη, Γ. Ψυχάρης

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Μπαλωμένου Αθανασία, Κόμης Βασίλειος, Ζαχάρος Κωνσταντίνος

Πανεπιστήμιο Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ

smpalom@upatras.gr, komis@upatras.gr, zacharos@upatras.gr

Η εργασία αυτή αφορά στη διερεύνηση της συμμεταβολής μεταβλητών μέσα από τη διερεύνηση της συμμεταβολής μηκών που αναπαριστούν αυτές τις μεταβλητές, με αξιοποίηση του εκπαιδευτικού λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Cabri Geometry II, για τη γεωμετρική προσέγγιση του κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Η έρευνα βασίζεται στο θεωρητικό πλαίσιο της εργαλειακής γένεσης (Rabardel, 1995; Trouche, 2004), καθώς και στο μοντέλο DeFT (Ainsworth, 2006). Στην έρευνα συμμετείχαν 48 μαθητές Β΄ Γυμνασίου, (13-14 ετών). Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων προκύπτει ότι οι μαθητές προσέγγισαν τον αλγεβρικό κανόνα σύγκρισης μέσα από διαδικασίες διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και γενικεύσεων, αξιοποιώντας δυναμικά πολλαπλές αναπαραστάσεις του Cabri σε συνδυασμό με τη λειτουργία “drag-mode”.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα έρευνα αφορά στην αξιοποίηση ψηφιακών εργαλείων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών, και ειδικότερα στη μελέτη της συμμεταβολής μεγεθών, σε μια διαδικασία μετάβασης από την απλή εμπειρία στη γενίκευση και τη διατύπωση κανόνων. Η επίδραση και η συνεισφορά των ψηφιακών εργαλείων χαρακτηρίζεται πολύ σημαντική στην εκπαίδευση (Κόμης, 2004). Αυτό προκύπτει και από το μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον που εκδηλώνεται τα τελευταία χρόνια για τη διδακτική αξιοποίηση αυτών στην εκπαίδευση. Η έρευνα δείχνει ότι τα υπολογιστικά εργαλεία επηρεάζουν και διαμορφώνουν τον τρόπο σκέψης και τις ενέργειες των μαθητών, συνεπώς και την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης αυτών (Trouche, 2004; Jupri et al., 2015; Kieran & Drijvers, 2006). Η τεχνολογία μπορεί, για παράδειγμα, να συμβάλει στην οπτικοποίηση (visualization) μιας αφηρημένης μαθηματικής οντότητας και στο δυναμικό χειρισμό της (Drijvers & Barzel, 2012), ή στην παραγωγή ποικίλων διαδικασιών διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και γενίκευσης αναφορικά με αυτή (Kieran & Drijvers, 2006). Η παρούσα εργασία αφορά στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων μιας έρευνας για τη γεωμετρική προσέγγιση του κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης δύο μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, με αξιοποίηση κατάλληλα διαμορφωμένου σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης (Karut,

1987), μέσα από μικτή προσέγγιση εργασίας μαθητών στο ψηφιακό περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας Cabri Geometry II και ταυτόχρονα στο περιβάλλον «χαρτί-μολύβι» (Kieran & Drijvers, 2006).

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Στην παρούσα έρευνα αξιοποιήθηκαν με συμπληρωματικό τρόπο η θεωρία της εργαλειακής γένεσης και το μοντέλο DeFT. Συγκεκριμένα, το μοντέλο DeFT κατεύθυνε το σχεδιασμό της έρευνας (σχετίζεται με την επιλογή εργαλείου, τις λειτουργίες των αναπαραστάσεων που υποστηρίζει το εργαλείο, καθώς και τη διαμόρφωση της δραστηριότητας με την οποία εμπλέκονται οι μαθητές), ενώ η εργαλειακή γένεση αξιοποιήθηκε για την ανάλυση των δεδομένων της μελέτης.

Εργαλειακή Γένεση (Instrumental Genesis)

Η εργαλειακή γένεση (*instrumental genesis*) είναι η διαδικασία μετατροπής ενός τεχνουργήματος (*artifact*) σε ‘εργαλείο’ (*instrument*) στα χέρια του μαθητή. Είναι μια διαδικασία κατά την οποία μαθητής και τεχνούργημα συν-διαμορφώνονται στην πράξη (Vérillon & Rabardel, 1995) μέσα από δύο συμπληρωματικές, ταυτόχρονες και αμφίδρομες διαδικασίες (Artigue, 2002). Από τη μια μεριά, υπάρχει η διαδικασία *οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation)*, κατά την οποία το υποκείμενο διαμορφώνει τις δράσεις του με βάση τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του τεχνουργήματος. Κατά τη διαδικασία *οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation)*, η εργαλειακή γένεση κατευθύνεται από το εργαλείο προς το υποκείμενο, οδηγώντας το στην ανάπτυξη ή προσαρμογή σχημάτων εργαλειακής δράσης (*schemes of instrumented action*) τα οποία σταδιακά διαμορφώνονται ως τεχνικές που επιτρέπουν στο υποκείμενο να ανταποκριθεί αποτελεσματικά σε δοσμένες δραστηριότητες (Artigue, 2002). Από την άλλη, υπάρχει η διαδικασία *τροποποίησης εργαλείου (instrumentalisation)*, κατά την οποία το υποκείμενο διαμορφώνει και προσαρμόζει το τεχνούργημα για δικές του χρήσεις, εμπλουτίζοντάς το σταδιακά με δυνατότητες για τις οποίες το τεχνούργημα δεν ήταν αρχικά μελετημένο να υποστηρίζει (Artigue, 2002).

Το μοντέλο DeFT

Το μοντέλο DeFT (Design – Functions – Tasks), (Ainsworth, 2006) αναδεικνύει τη συμβολή των πολλαπλών αναπαραστάσεων στη μάθηση και στην κατανόηση εννοιών, προσδιορίζοντας τις παραμέτρους που εξασφαλίζουν αυτά τα θετικά αποτελέσματα. Σύμφωνα με το μοντέλο DeFT, οι εκπαιδευτικοί μπορούν να μεγιστοποιούν την αποτελεσματικότητα της αξιοποίησης των πολλαπλών αναπαραστάσεων

στη διαδικασία της μάθησης λαμβάνοντας υπόψη τρεις καθοριστικές πτυχές:

1. Τις σχεδιαστικές παραμέτρους του τεχνολογικού εργαλείου που χρησιμοποιούμε (Design). Αυτές αφορούν είτε στην επιλογή του κατάλληλου εργαλείου, είτε στο σχεδιασμό ενός ψηφιακού περιβάλλοντος που συνεισφέρει στις απαιτήσεις της μάθησης.
2. Τις διαφορετικές παιδαγωγικές λειτουργίες (functions) που μπορούν να επιτελέσουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις και οι οποίες υποστηρίζουν τη μάθηση. Σύμφωνα με την Ainsworth (1999), οι πολλαπλές αναπαραστάσεις μπορούν να δρουν συμπληρωματικά ή μια στην άλλη ως προς την πληροφορία που περιέχουν ή να υποστηρίζουν συμπληρωματικές διαδικασίες. Επιπλέον, μπορούν να δρουν περιοριστικά ή μια στην άλλη αναφορικά με τη μετάφραση κάθε μιας αναπαράστασης. Ακόμη, μπορούν να υποστηρίζουν διαδικασίες βαθύτερης κατανόησης κατά τη διαδικασία αφαιρετικού συλλογισμού του μαθητή.
3. Τις γνωστικές δραστηριότητες (tasks) με τις οποίες ο δάσκαλος εμπλέκει τους μαθητές κατά τη μαθησιακή διαδικασία με ταυτόχρονη αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Τα υπολογιστικά εργαλεία και οι πολλαπλές αναπαραστάσεις δεν επαρκούν αφ' εαυτού για την υποστήριξη διαδικασιών διερεύνησης από τους μαθητές ή για την κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών. Η διδακτική τους αξιοποίηση προκύπτει μέσα από το σχεδιασμό και την εφαρμογή κατάλληλα διαμορφωμένων δραστηριοτήτων από τον εκπαιδευτικό, στο πλαίσιο διδακτικών παρεμβάσεων διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών και γενικεύσεων, οι οποίες μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση.

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΕΡΩΤΗΜΑ

Στην ενότητα των αποτελεσμάτων που θα παρουσιαστούν στην εργασία αυτή, επιχειρούμε να απαντήσουμε στο ακόλουθο ερευνητικό ερώτημα:

Πώς η αξιοποίηση πολλαπλών αναπαραστάσεων στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας μπορεί να συμβάλει στην ανάπτυξη του αλγεβρικού συλλογισμού μαθητών σχετικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, μέσω γεωμετρικής προσέγγισης και οπτικοποίησης, σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας;

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Η παρούσα ποιοτική έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης η οποία σχεδιάστηκε και εκπονήθηκε αξιοποιώντας διάφορους τύπους εργαλείων και διαδικασιών συλλογής δεδομένων.

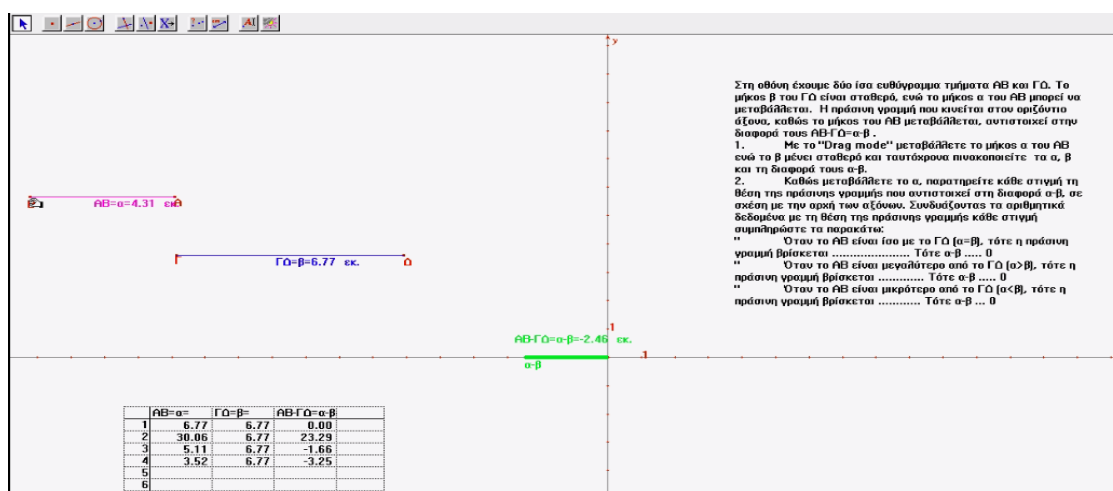
Η έρευνα έλαβε χώρα στο σχολικό εργαστήριο πληροφορικής του Πειραματικού Γυμνασίου Πανεπιστημίου Πατρών. Δύο πλήρη τμήματα μαθητών της Β' τάξης του σχολείου (συνολικά 48 μαθητές, 13-14 ετών) συμμετείχαν σε αυτό το πείραμα μάθησης. Αυτοί οι μαθητές εργάστηκαν σε 4 ομάδες των 12 μαθητών αντίστοιχα. Κάθε ομάδα εργάστηκε ξεχωριστά στο σχολικό εργαστήριο πληροφορικής. Οι μαθητές κάθε ομάδας εργάστηκαν ατομικά αξιοποιώντας το εκπαιδευτικό λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Cabri Geometry II, συμπληρώνοντας ταυτόχρονα το ειδικά σχεδιασμένο φύλλο εργασίας, προκειμένου να φέρουν εις πέρας τη δοσμένη δραστηριότητα. Κάθε μαθητής συμμετείχε για περίπου μία ώρα για να ολοκληρώσει τη δραστηριότητα. Προηγήθηκε μια φάση εξοικείωσης των μαθητών με τις λειτουργίες και τα εργαλεία του Cabri Geometry II. Αυτή η φάση κράτησε επίσης περίπου μία ώρα για κάθε μαθητή. Το πείραμα ήταν προσαρμοσμένο σε πραγματικές συνθήκες της τάξης. Τα δεδομένα της έρευνας αποτελούν τα αρχεία Cabri με τις ενέργειες των μαθητών, τα φύλλα εργασίας των μαθητών, καθώς και τα βίντεο καταγραφής των ενεργειών των μαθητών με το λογισμικό Camtasia.

ΠΡΟΤΕΡΗ ΓΝΩΣΗ ΜΑΘΗΤΩΝ

Οι μαθητές πριν την εμπλοκή τους με τη δραστηριότητα της έρευνας γνώριζαν πώς να συγκρίνουν αριθμούς σύμφωνα με τη σχετική τους θέση πάνω στην αριθμογραμμή, καθώς και σύμφωνα με την αξία των ψηφίων τους. Εντούτοις, δεν είχαν διαπραγματευτεί τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης με μεταβλητές: *Αν $a > b$ τότε $a - b > 0$, ενώ αν $a < b$, τότε $a - b < 0$ και τέλος, αν $a = b$, τότε $a - b = 0$.*

Η ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Οι μαθητές κλήθηκαν να συγκρίνουν δυναμικά δύο μεταβλητές a και b , οι οποίες αναπαραστάθηκαν με δύο δυναμικά ευθύγραμμα τμήματα στην επιφάνεια του λογισμικού Cabri Geometry II, διερευνώντας τη συμμεταβολή δύο ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούσαν στη μεταβλητή a και στην αλγεβρική διαφορά $a - b$ αντίστοιχα (Εικόνα 1).



Εικόνα 7: στιγμιότυπο δράσης μαθητών στο πλαίσιο δραστηριότητας σύγκρισης μη αρνητικών αριθμών

Η δραστηριότητα στην οποία εμπλέξαμε τους μαθητές ήταν δομημένη σε 3 διαδοχικά μέρη: 1)Διερεύνηση, 2)Διατύπωση εικασιών και 3)Γενίκευση. Οι μαθητές κλήθηκαν να αξιοποιήσουν δυναμικά πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις του Cabri Geometry II (γεωμετρικής, γραφικής, συμβολικής και αριθμητικής φύσης) και να προβούν στη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων σχετικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης, οι οποίες αποτυπώθηκαν λεκτικά και συμβολικά στα φύλλα εργασίας τους.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Διεξήχθη ποιοτική ανάλυση των ψηφιακών και γραπτών δεδομένων της έρευνας (Cohen *et al.*, 2007), δίνοντας έμφαση στις γραπτές καταχωρήσεις των μαθητών στα φύλλα εργασία τους, οι οποίες προέκυψαν από τις ενέργειες των μαθητών στο περιβάλλον του λογισμικού σε συνδυασμό με ταυτόχρονη εργασία τους στο περιβάλλον «χαρτί - μολύβι».

Μέρος 1^ο. Διερεύνηση: Οι μαθητές αξιοποίησαν τη λειτουργία ‘drag mode’ ώστε να μεταβάλλουν το μήκος α του ευθυγράμμου τμήματος AB (α: ανεξάρτητη μεταβλητή) και διερεύνησαν τη μεταβολή του ευθυγράμμου τμήματος που αντιστοιχούσε στη διαφορά ‘α-β’ των ευθυγράμμων τμημάτων AB και ΔΓ (α-β: εξαρτημένη μεταβλητή) πάνω στον οριζόντιο άξονα σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις: α=β, α>β, α<β. Οι μαθητές αξιοποίησαν παράλληλα και τις αριθμητικές μετρήσεις που παράγονταν με χρήση των εργαλείων μέτρησης (με συμπληρωματικό τρόπο), καθώς και το εργαλείο ‘πινακοποίησης’ του λογισμικού, κατά τη δυναμική διαχείριση των ευθυγράμμων τμημάτων.

Μέρος 2^ο. Διατύπωση εικασιών: Κατά τη δυναμική διαχείριση των ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούσαν στις μεταβλητές α και α - β , οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να διατυπώνουν ταυτόχρονα εικασίες για τη συμμεταβολή των α και α - β στα φύλλα εργασίας τους. Από τη μελέτη των γραπτών, οι μαθητές φάνηκε ότι προσέγγισαν τη συμμεταβολή των α και α - β με τρεις τρόπους (Πίνακας 5): 1) **C1: Οπτικο-χωρική προσέγγιση**, όπου οι μαθητές συσχέτισαν την αυξομείωση του α με την αυξομείωση του μήκους του αντίστοιχου ευθυγράμμου τμήματος και ταυτόχρονα παρατήρηση της αντίστοιχης μετακίνησης του α - β δεξιά ή αριστερά σε σχέση με την αρχή των αξόνων, 2) **C2: Αλγεβρική προσέγγιση**, όπου οι μαθητές προσέγγισαν τη σύγκριση των α και β μελετώντας το πρόσημο της διαφοράς α - β , αξιοποιώντας τα αριθμητικά δεδομένα που συγκέντρωναν στον πίνακα τιμών στην επιφάνεια του λογισμικού, και 3) **C3: Μικτή προσέγγιση (Οπτικο-χωρική και αλγεβρική)**, όπου οι μαθητές συνδύασαν το πρόσημο της διαφοράς α - β με τη θέση του αντίστοιχου ευθυγράμμου τμήματος που την απεικονίζει πάνω στον οριζόντιο άξονα, αλλά και σε συσχέτιση με την αυξομείωση του ευθυγράμμου τμήματος που αντιστοιχεί στη μεταβλητή α , αξιοποιώντας ταυτόχρονα γεωμετρικές, αριθμητικές και συμβολικές αναπαραστάσεις των υπό σύγκριση μεγεθών.

Κατηγορίες παρατηρήσεων σχετικά με τη συμμεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής α και της εξαρτημένης μεταβλητής α - β	Συχνότητα (μέγεθος δείγματος: 48)
C1: Οπτικο-χωρική προσέγγιση	37
C2: Αλγεβρική προσέγγιση	6
C3: Μικτή προσέγγιση	5

Πίνακας 5: προσεγγίσεις μαθητών για τη συμμεταβολή των μεταβλητών α και α - β ως συμμεταβαλλόμενα ευθύγραμμα τμήματα στο Cabri

Όπως προκύπτει από τον Πίνακα 1, επικρατέστερη είναι η οπτικο-χωρική προσέγγιση (37 παρατηρήσεις). Αυτό δικαιολογείται από τη φύση του εργαλείου, το οποίο αποτελεί εργαλείο δυναμικής γεωμετρίας. Σύμφωνα με τη διαδικασία οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation), το εργαλείο με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς του επηρεάζει και διαμορφώνει τις ενέργειες και το συλλογισμό των μαθητών (Trouche, 2004; Artigue, 2002). Η δυναμική αξιοποίηση ταυτόχρονων διασυνδεδεμένων αναπαραστάσεων γεωμετρικής (σχηματική αναπαράσταση), συμβολικής και αριθμητικής φύσης (αριθμητική αναπαράσταση και αναπαράσταση με πίνακα τιμών) που υποστηρίζει το Cabri Geometry II, στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας, επηρέασε και διαμόρφωσε

τις ενέργειες και το συλλογισμό των μαθητών, σύμφωνα με το μοντέλο DeFT (Ainsworth, 2006), με συμπληρωματικό και περιοριστικό τρόπο. Ακολουθεί η αλγεβρική προσέγγιση (6 παρατηρήσεις), και τέλος η μικτή προσέγγιση (οπτικο-χωρική και αλγεβρική), (5 παρατηρήσεις).

Μέρος 3^ο. Γενίκευση: Οι μαθητές κλήθηκαν στη συνέχεια να συμπληρώσουν τα κενά σε κατάλληλα διαμορφωμένες προτάσεις που αντιπροσώπευαν τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης με λεκτικό ή συμβολικό τρόπο. Όλοι οι μαθητές της έρευνας διατύπωσαν ορθά με λεκτικό τρόπο τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης (λεκτική αναπαράσταση). Από την άλλη μεριά, μόνο οι 42 από τους 48 μαθητές της έρευνας αποτύπωσαν ορθά με συμβολικό τρόπο τον παραπάνω κανόνα. Η συμβολική αναπαράσταση φάνηκε να δυσκολεύει περισσότερο τους μαθητές της έρευνας σε σχέση με τη λεκτική αναπαράσταση.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα έρευνα προσεγγίσθηκε ένα αλγεβρικό πρόβλημα σύγκρισης με γεωμετρικό τρόπο. Συγκεκριμένα, οι μαθητές κλήθηκαν να χειριστούν δυναμικά τη διαφορά $\alpha - \beta$ δύο μεταβλητών α και β , οπτικοποιημένη ως μεταβαλλόμενο ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο είχε αρχή την αρχή των αξόνων και μπορούσε να κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα εξαρτώμενο από τη συμμεταβολή των α και β . Οι μαθητές καθοδηγούμενοι από κατάλληλο φύλλο εργασίας διερεύνησαν τη συμμεταβολή των α και $\alpha - \beta$, συνδυάζοντας, με συμπληρωματικό και περιοριστικό τρόπο, αναπαραστάσεις γεωμετρικής, αριθμητικής, συμβολικής και λεκτικής φύσης και διατύπωσαν σχετικές εικασίες. Οι εικασίες αυτές αντιστοιχήθηκαν σε εργαλειακές τεχνικές που ανέπτυξαν οι μαθητές, ώστε να ανταποκριθούν αποτελεσματικά στη δοσμένη δραστηριότητα και οδήγησαν στην ανάπτυξη ή προσαρμογή σχημάτων εργαλειακής δράσης (schemes of instrumented action). Μέσα από αυτές τις τεχνικές έγινε ορατό και παρατηρήσιμο το σχήμα εργαλειακής δράσης που φαίνεται να οικοδόμησαν οι μαθητές σχετικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης αριθμών μέσω γεωμετρικής προσέγγισης και οπτικοποίησης. Το σχήμα αυτό διατυπώνεται ακολούθως:

- Οι μαθητές αναγνωρίζουν την αναπαράσταση ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών ως μεταβαλλόμενα ευθύγραμμα τμήματα
- Οι μαθητές διερευνούν (αξιοποιώντας το 'drag mode') τη συμμεταβολή των α και $\alpha - \beta$, συσχετίζοντάς τα με τα αριθμητικά δεδομένα που παράγονται ταυτόχρονα για τα α , β και $\alpha - \beta$ και διατυπώνουν εικασίες

- Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μεταφράσουν τα αποτελέσματα των διερευνήσεών τους με λεκτικό και συμβολικό τρόπο

Αυτή η διαδικασία δεν είναι εφικτό να υλοποιηθεί στο στατικό περιβάλλον «χαρτί - μολύβι».

Το Cabri Geometry II, λειτουργώντας ως διαμεσολαβητής, ενέπνευσε και επηρέασε τις ενέργειες και το συλλογισμό των μαθητών, όπως αυτός αποτυπώθηκε και στις απαντήσεις τους στα φύλλα εργασίας τους (Μπαλωμένου, 2017; Balomenou *et al.*, 2017). Στο πλαίσιο εμπλοκής τους με τη δραστηριότητα της έρευνας, οι μαθητές φαίνεται ότι ανέπτυξαν σχήματα χρήσης και εργαλειακής δράσης. Συγκεκριμένα, αξιοποιήθηκε το «*σχήμα της κίνησης*» (άμεσης και έμμεσης) και το «*σχήμα της γεωμετρικής προσέγγισης της αλγεβρικής σύγκρισης μέσω δυναμικής διαχείρισης μεταβλητών*». Οι εργαλειακές τεχνικές που αναπτύχθηκαν για τη σύγκριση μεταβλητών μέσω της διερεύνησης της συμμεταβολής ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούν σε αυτές τις μεταβλητές ήταν οπτικο-χωρικής, αλγεβρικής και μικτής φύσης:

Οπτικο-χωρικές τεχνικές: στηρίχθηκαν κυρίως στην οπτική αντίληψη των μαθητών για τη θέση των ευθυγράμμων τμημάτων που αντιστοιχούσαν στις μεταβλητές α και $\alpha-\beta$, και οδήγησαν στη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων μέσω δυναμικής οπτικής διερεύνησης της συμμεταβολής τους.

Αλγεβρικές τεχνικές: προέκυψαν από τη μελέτη στην επιφάνεια διεπαφής του λογισμικού των αριθμητικών παραγόμενων κατά τη δυναμική συμμεταβολή των μεγεθών α και $\alpha-\beta$ και της 'πινακοποίησης' αυτών. Μελετώντας τις αριθμητικές συμμεταβολές οι μαθητές οδηγήθηκαν σε διατύπωση εικασιών αλγεβρικής φύσεως.

Μικτές τεχνικές: προέκυψαν συνδυάζοντας ταυτόχρονα οπτικο-χωρικές και αλγεβρικές προσεγγίσεις, όπως φάνηκε από τη διατύπωση εικασιών των μαθητών στο φύλλο εργασίας τους σχετικά με την αλγεβρική σύγκριση μεγεθών. Αποτελούν πιο σύνθετες και υψηλότερου νοητικού επιπέδου τεχνικές (Battista, 2006).

Όπως προκύπτει από την ανάλυση των δεδομένων, συγκεκριμένες χρήσεις του εργαλείου οδήγησαν στην οικοδόμηση συγκεκριμένων κατηγοριών εργαλειακών τεχνικών από τους μαθητές, οι οποίες με τη σειρά τους οδήγησαν κάθε μαθητή της έρευνας στην εννοιολογική κατανόηση του υπό εξέταση αλγεβρικού κανόνα. Παρόλα αυτά, η κατανόηση αυτή δεν μεταφράζεται με τον ίδιο μοναδικό τρόπο για κάθε μαθητή. Κάθε μαθητής οικοδομεί τις δικές του ατομικές νοητικές

αναπαραστάσεις κατά τη διαδικασία οικοδόμησης εργαλείου (instrumentation), (Trouche, 2004) οι οποίες τελικά εκφράζονται μέσα από τις διαφορετικές λεκτικές διατυπώσεις των εικασιών και γενικεύσεων των μαθητών στα φύλλα εργασίας τους.

Επιπλέον, η ανάλυση των αποτελεσμάτων δείχνει ότι όλοι οι μαθητές ενεπλάκησαν ενεργά με τη δραστηριότητα και περνώντας από διαδικασίες διερεύνησης στη διατύπωση εικασιών και τελικά γενικεύσεων, οικοδόμησαν μια οπτικο-χωρική αντίληψη της αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών πραγματικών αριθμών, την οποία αποτύπωσαν λεκτικά και συμβολικά στα φύλλα εργασίας τους. Στο σημείο αυτό, επισημαίνεται ότι η συμβολική αναπαράσταση φάνηκε να δυσκολεύει ορισμένους μαθητές.

Οι μαθητές αξιοποίησαν ταυτόχρονα πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις του Cabri Geometry II με συμπληρωματικό (complementary), περιοριστικό (constraining) και εποικοδομιστικό (constructing) τρόπο (Ainsworth, 1999, 2006). Οι αναπαραστάσεις που αξιοποίησαν οι μαθητές είναι: γεωμετρικές αναπαραστάσεις μεταβλητών ως μεταβαλλόμενα ευθύγραμμα τμήματα, αριθμητικές και συμβολικές αναπαραστάσεις, καθώς και αναπαραστάσεις με τη μορφή πίνακα. Συνδυάζοντας τις αναπαραστάσεις αυτές με συμπληρωματικό και περιοριστικό τρόπο, οι μαθητές οδηγήθηκαν στη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων τις οποίες αποτύπωσαν στο φύλλο εργασίας του με λεκτική και συμβολική μορφή. Παράλληλα, η δυναμική μεταβολή του μήκους α του ευθυγράμμου τμήματος AB και η ταυτόχρονη διερεύνηση της συμμεταβολής των α και $\alpha-\beta$ ως ευθύγραμμα τμήματα στην οθόνη του Cabri, διευκόλυνε τους μαθητές στην κατανόηση της συμμεταβολής αυτών των μεγεθών, υποστηρίζοντας με αυτό τον τρόπο τη διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων (λειτουργία βαθύτερης κατανόησης, του πλαισίου DeFT).

Συνεπώς, στη συγκεκριμένη έρευνα, αξιοποιήθηκαν πολλαπλές διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις του Cabri Geometry II αρχικά με συμπληρωματικό τρόπο, σύμφωνα με το DeFT πλαίσιο. Οι αναπαραστάσεις αυτές διέφεραν είτε ως προς τη πληροφορία που παρείχαν είτε ως προς τις λειτουργίες που υποστήριζαν, λειτουργώντας έτσι συμπληρωματικά ή μια ως προς την άλλη κατά τη διαδικασία της μάθησης. Συνδυάζοντας πολλαπλές αναπαραστάσεις, οι μαθητές ωφελήθηκαν από το άθροισμα των πλεονεκτημάτων τους (Ainsworth, 1999). Όπως αναφέρει ο Karut (1987, pp. 19-26): «η γνωστική σύνδεση αναπαραστάσεων δημιουργεί ένα όλο που είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των μερών του». Η αξιοποίηση πολλαπλών διασυνδεδεμένων

αναπαραστάσεων στο πλαίσιο κατάλληλα διαμορφωμένης δραστηριότητας οδήγησε τους μαθητές σε βαθύτερη κατανόηση, υποστηρίζοντας το πέρασμα από τη διατύπωση εικασιών στη διατύπωση γενικεύσεων αναφορικά με τον κανόνα αλγεβρικής σύγκρισης μη αρνητικών αριθμών στο Cabri Geometry II.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Ainsworth, S.E. (1999). The functions of multiple representations. *Computers and Education*, 33(2-3), 131-152.
- Ainsworth, S.E. (2006). DeFT: A conceptual framework for learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Balomenou, A., Komis, V., & Zacharos, K. (2017). Handling Signs in Inequalities by Exploiting Multiple Dynamic Representations—the Case of ALNuSet. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-31.
- Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 140.
- Cohen, L., Manion, L. and Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (6th ed), Routledge Publishers, Oxford, UK.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International journal of computers for mathematical learning*, 11(2), 205-263.
- Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 19-26.
- Κόμης, Β. (2004). *Εισαγωγή στις Εκπαιδευτικές Εφαρμογές των ΤΠΕ*, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα.
- Μπαλωμένου, Α. (2017). *Οικοδόμηση Μαθηματικών Εννοιών με Αξιοποίηση Υπολογιστικών Εργαλείων Πολλαπλών Αναπαραστάσεων: Η περίπτωση της ανισότητας*. (Αδημοσίευτη) Διδακτορική διατριβή, Παν/μιο Πατρών, ΤΕΕΑΠΗ, Μάρτιος, 2017.



Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies. Approche cognitive des instruments contemporaines* Ed.: A. Colin Paris.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, 9(3), 281-307.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts. A contribution to the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10, 77-101.