Στρατηγικές προσέγγισης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης στην Προσχολική Εκπαίδευση[1]

Κώστας Ζαχάρος, Βασίλης Κόμης, Ζωή Μπακανδρέα, Κωνσταντίνα Παπαδημητρίου,

Περίληψη. Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η παρατήρηση και καταγραφή των αυθόρμητων στρατηγικών παιδιών προσχολικής εκπαίδευσης σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Στην έρευνα συμμετείχαν δεκατέσσερις μαθητές και μαθήτριες ενός δημόσιου Νηπιαγωγείου. Η αξιολόγηση του ερευνητικού μας εγχειρήματος ανέδειξε τα εξής: Αρχικά ότι τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, στις μορφές που τα πραγματευόμαστε εδώ, μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο διδασκαλίας στην προσχολική εκπαίδευση. Επιπρόσθετα, αναδεικνύεται διδακτικά ο ουσιώδης ρόλος της προσέγγισης των μαθηματικών εννοιών σε ένα πλαίσιο συμφραζομένων, τέτοιο που να είναι πλούσια νοηματοδοτημένο και να σχετίζεται με τις εμπειρίες των παιδιών.

Θεωρητικές επισημάνσεις

Η πρόσθεση και αφαίρεση μονοψήφιων αριθμών μπορεί να αποτελέσει διδακτικό στόχο για τους μαθητές και μαθήτριες της προσχολικής εκπαίδευσης (Hughes 1986). Αυτό βέβαια με την προϋπόθεση ότι το διδακτικό ενδιαφέρον θα συγκεντρώνεται κύρια στις νοητικές διεργασίες των παιδιών και όχι στην τυπολογία των γραπτών απαντήσεων με την χρήση του μαθηματικού συμβολισμού.

Πρώτα νοητικά σχήματα στην πρόσθεση και αφαίρεση

Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση των μαθητών και μαθητριών της προσχολικής εκπαίδευσης συσχετίζει την ικανότητα της πρόσθεσης και αφαίρεσης μικρών ποσοτήτων με την κατάκτηση κάποιων βασικών γνωστικών σχημάτων. Τέτοια είναι, για παράδειγμα, το «σχήμα διαδοχής» (successor schema) και το σχήμα «μέρος-μέρος-όλο» (part-part- whole schema) (Resnick 1983).

[1] Ζαχάρος, Κ., Κόμης, Β., Μπακανδρέα, Ζ. & Παπαδημητρίου, Κ. (2007). Στρατηγικές προσέγγισης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης στην Προσχολική Εκπαίδευση. *Νέα Παιδεία*, τ. 121, σ. 78-94

Το σχήμα διαδοχής (Successor Schema). Το γνωστικό αυτό σχήμα σχετίζεται με μια νοητική αριθμητική γραμμή (mental number line) που επιτρέπει στο παιδί να δίνει απαντήσεις σε προβλήματα σύγκρισης, όπως, «ποιο είναι μεγαλύτερο το 7 ή το 8;» χωρίς την ανάγκη της προσφυγής στη συγκεκριμένη ποσότητα. Τα παιδιά στο γνωστικό σχήμα της διαδοχής αναπαριστούν νοερά τους αριθμούς από το 1 έως το 10 στη σειρά χωρίς να σκέφτονται τις ποσότητες που οι αριθμοί αυτοί αντιπροσωπεύουν. Η οικοδόμηση του σχήματος διαδοχής συμβάλλει στην επιτυχή εκτέλεση των πράξεων της πρόσθεσης και αφαίρεσης. Το αποτέλεσμα, για παράδειγμα, της πράξης 6+2 βρίσκεται αφού «μετατοπιστούμε» στην νοητική αριθμητική γραμμή δύο βήματα δεξιά του 6. Όμοια είναι: 9-1=8, επειδή, σύμφωνα με τη νοητική αριθμητική γραμμή, το 8 είναι ένα σημείο αριστερά του 9. Επίσης, οι περισσότερες στρατηγικές αντιμετώπισης της πρόσθεσης 8+3, βασίζονται στη «λογική» της νοητικής αριθμητικής γραμμής, σύμφωνα με την οποία το 8 απέχει δύο βήματα από το 10 και ένα επιπλέον από το 11 (Shane 1999).

Ένα πρώτο βήμα για την κατάκτηση του σχήματος διαδοχής δίνεται με τη διδακτική προσέγγιση της αλλαγής μιας ποσότητας προτείνοντας κάθε φορά «ένα περισσότερο» ή «ένα λιγότερο». Μπορούμε, για παράδειγμα, να προτρέπουμε παιδιά τριών ετών να βάλουν «ένα ακόμη» βόλο στο κουτί. Η ίδια προσέγγιση μπορεί να ακολουθηθεί και από παιδιά προσχολικής εκπαίδευσης όπου, για παράδειγμα, από τον αριθμό οκτώ μπορούν να φτάσουν στον αριθμό δέκα με τη διαδοχική εφαρμογή της στρατηγικής του «ένα περισσότερο» (Shane 1999).

Το σχήμα «μέρος- μέρος –όλο» (part-part- whole Schema). Ένα δεύτερο γνωστικό σχήμα είναι αυτό που χαρακτηρίζεται ως σχήμα «μέρος-μέρος-όλο» (part-part- whole schema, Resnick 1983). Εδώ συντελείται η νοητική αναπαράσταση του αριθμού ως σύνθεσης επιμέρους ποσοτήτων, με ποικίλους τρόπους. Η πρόσθεση και η αφαίρεση συνδέονται ουσιαστικά με τις σχέσεις που δημιουργούνται μεταξύ ομάδων αριθμών που εμπλέκονται στις πράξεις αυτές. Για παράδειγμα, τα έξι αντικείμενα μπορούν να χωριστούν σε πέντε στο ένα χέρι και ένα στο άλλο ή τέσσερα στο ένα και δύο στο άλλο, κλπ.

Στην οικοδόμηση του παραπάνω σχήματος μπορεί να συνεισφέρει η δημιουργία συγκεκριμένων ποσοτήτων αντικειμένων με διάφορους συνδυασμούς (Shane 1999). Μπορεί για παράδειγμα, να προταθεί η κατασκευή μιας ανθοδέσμης έξι λουλουδιών με δύο διαφορετικά χρώματα με όλους τους δυνατούς τρόπους. Επίσης, μπορεί μια ποσότητα αντικειμένων του ίδιου χρώματος να αναλυθούν σε δύο ποσότητες με όλους τους δυνατούς συνδυασμούς. Σκοπός και στις δύο περιπτώσεις είναι να προταθούν όσο το δυνατόν περισσότεροι συνδυασμοί και να γίνει λεκτική περιγραφή της διαδικασίας. Με τα παραδείγματα που περιγράφονται ως «μέρος-μέρος-όλο» εισάγουμε ουσιαστικά τα παιδιά σε άτυπες μορφές πρόσθεσης και αφαίρεσης μέσα σε ένα οικείο γι' αυτά πλαίσιο συμφραζομένων.

Τυπολογίες προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Οι πράξεις της πρόσθεσης και αφαίρεσης εμφανίζονται με ποικίλες μορφές, παρουσιάζοντας διαφορετικούς βαθμούς δυσκολίας ανάλογα με τη συγκεκριμένη μορφή του προβλήματος. Στη συνέχεια παρατίθενται μορφές προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης που μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο πραγμάτευσης στην προσχολική εκπαίδευση.

Προβλήματα αλλαγής της κατάστασης. Η απλούστερη μορφή τους είναι αυτή όπου μια ποσότητα μετασχηματίζεται προσθέτοντας ή αφαιρώντας μια άλλη ποσότητα. Τα προβλήματα αυτής της μορφής αναφέρονται ως προβλήματα «αλλαγής κατάστασης» (Nunes & Bryant 1996) ή σαν προβλήματα «μεταβολής του μέτρου» (Vergnaud 1979 και 1983) μιας ποσότητας. Μια πρώτη, απλουστευμένη, μορφή αλλαγής κατάστασης συναντήσαμε στην περίπτωση του «σχήματος διαδοχής» που αναφέρθηκε προηγούμενα.

Όμως, τα προβλήματα αλλαγής κατάστασης δεν παρουσιάζουν όλα τον ίδιο βαθμό δυσκολίας για τα παιδιά της προσχολικής ηλικίας. Τα προβλήματα γίνονται ιδιαίτερα δύσκολα στις περιπτώσεις που ένας από τους προσθετέους είναι άγνωστος (προβλήματα missing-addend, Nunes & Bryant 1996). Ένας τρόπος διδακτικής αντιμετώπισης των δυσκολιών των προβλημάτων της παραπάνω μορφής είναι η προσφυγή σε μορφές χωρικής αναπαράστασης των ποσοτήτων με τη χρήση συγκεκριμένων αντικειμένων.

Προβλήματα σύνθεσης δύο ποσοτήτων. Μια άλλη μορφή προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης είναι αυτή που χαρακτηρίζεται από τη σύνθεση δύο ποσοτήτων. Εδώ δύο ποσότητες συντίθενται για να δημιουργήσουν μια καινούργια. Μια ειδική περίπτωση των προβλημάτων σύνθεσης δύο ποσοτήτων είναι αυτή των προβλημάτων που χαρακτηρίζονται ως «καταστάσεις μέρος-όλο» (part-whole situations) (Nunes & Bryant 1996), που είναι η περίπτωση του σχήματος «μέρος-μέρος-όλο» που αναφέρθηκε προηγούμενα και πρόκειται για όλους τους δυνατούς τρόπους σύνθεσης ποσοτήτων ώστε να παραχθεί μια συγκεκριμένη ποσότητα.

Καταστάσεις σύγκρισης. Μια επόμενη κατηγορία προβλημάτων περιέχει καταστάσεις σύγκρισης. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις έτσι και εδώ ο βαθμός δυσκολίας του προβλήματος εξαρτάται από το πώς τίθεται κάθε φορά η ερώτηση.

Παράδειγμα εύκολης ερώτησης: *Ο Νίκος έχει οκτώ βόλους και ο Κώστας πέντε. Ποιος έχει περισσότερους βόλους;*

Παράδειγμα δύσκολης ερώτησης: *Ο Νίκος έχει οκτώ βόλους και ο Κώστας πέντε. Πόσους περισσότερους βόλους έχει ο Νίκος από τον Κώστα;*

Ένας μεγάλος αριθμός παιδιών προσχολικής και της πρώτης σχολικής ηλικίας αποτυγχάνει σε προβλήματα σύγκρισης συνόλων όταν οι ερωτήσεις τίθενται όπως στο δεύτερο παραδείγματα. Μια ερμηνευτική προσέγγιση που βασίζεται στο έργο του Piaget ισχυρίζεται ότι στις περιπτώσεις της αποτυχίας τα παιδιά δεν είναι ικανά για κατάλληλες μια-προς-μια αντιστοιχήσεις μεταξύ δεδομένων συνόλων. Όμως, σύμφωνα με άλλες προσεγγίσεις (πχ. Hudson 1983), η αποτυχία συνήθως αποδίδεται στην ελλιπή κατανόηση των ερωτήσεων αυτής της μορφής. Η εναλλακτική εδώ προσέγγιση βασίζεται στη λεκτική αναδιατύπωση του προβλήματος που παράλληλα με τη χωρική αναπαράσταση των ποσοτήτων και διαδικασίες ένα-προς- ένα αντιστοίχησης, συνεισφέρουν στη διδακτική αντιμετώπιση των προβλημάτων αυτής της μορφής (Hudson 1983, Nunes & Bryant 1996).

Μεθοδολογική προσέγγιση

Σκοπός της έρευνας

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η παρατήρηση και καταγραφή των αυθόρμητων στρατηγικών παιδιών προσχολικής εκπαίδευσης σε μια σειρά από προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Τα προβλήματα εντάσσονται στην κατηγορία των προβλημάτων «αλλαγής κατάστασης» (change situation), όπου τα παιδιά καλούνται να μεταβάλλουν θετικά ή αρνητικά μια ποσότητα προσθέτοντας ή αφαιρώντας απ’ αυτή μια άλλη ποσότητα. Το μαθηματικό περιεχόμενο των προβλημάτων που θα μας απασχολήσουν έχει τη μορφή Α+Β=Γ και απαντάται σε τρεις διαφορετικές εκδοχές:

(Ι) Είναι τα προβλήματα που οι δύο προσθετέοι είναι γνωστοί και είναι ζητούμενο το αποτέλεσμα (σχηματικά: Α+Β=Χ).

(ΙΙ) Τα προβλήματα με άγνωστο το δεύτερο προσθετέο (Α+Χ=Γ).

(III) Τέλος, έχουμε μια παραλλαγή της δεύτερης περίπτωσης με ζητούμενο εδώ τον πρώτο προσθετέο (Χ+Β=Γ).

Στις όλες τις περιπτώσεις ενδέχεται η μεταβολή να είναι αρνητική γεγονός που αντιστοιχεί στην πράξη της αφαίρεσης.

Η έρευνά μας είναι μια μελέτη περίπτωσης με τα χαρακτηριστικά της συμμετοχικής παρατήρησης (Cohen & Manion 1994). Οι ερευνητές, στους οποίους δεν εντάσσεται η νηπιαγωγός που διδάσκει τα νήπια, εμπλέκονται στις δραστηριότητες που ερευνούν και παρατηρούν τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από τα παιδιά ενός Νηπιαγωγείου στην αντιμετώπιση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης.

Στην έρευνα συμμετείχαν δεκατέσσερις μαθητές και μαθήτριες ενός δημόσιου Νηπιαγωγείου επαρχιακής πόλης εκ των οποίων οκτώ είναι νήπια και έξι προνήπια.

Για τη διασφάλιση της τεχνικής αρτιότητας και λειτουργικότητας των έργων που εκτελούν τα παιδιά, η τελική μορφή του υλικού διαμορφώθηκε μετά από δοκιμή του συνόλου των έργων με δύο νήπια της τάξης, που στη συνέχεια δεν συμπεριλήφθηκαν στα προς μελέτη υποκείμενα της έρευνας.

Η διαδικασία συλλογής των ερευνητικών δεδομένων

Οι μαθητές και μαθήτριες που συμμετέχουν στην έρευνά μας χωρίζονται σε δύο ομάδες, καθεμία αποτελούμενη από νήπια και προνήπια. Οι απαντήσεις των παιδιών καταγράφονται σε βίντεο που δίνει τη δυνατότητα για μια ποιοτική προσέγγιση της συμπεριφοράς των παιδιών.

Το έργο

Τα υλικά:

- Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος (εικόνα 1), χωρισμένο σε τρία διαμερίσματα διαφορετικών χρωμάτων (πορτοκαλί, πράσινο, μπλε). Κάθε διαμέρισμα καλύπτεται ώστε να μην είναι ορατό το περιεχόμενό του.
- Σε κάθε διαμέρισμα της κυλινδρικής κατασκευής είναι τοποθετημένα πέντε όμοια αντικείμενα. Τα αντικείμενα αυτά είναι βόλοι, καραμέλες και γόμες-μοτοσικλέτες (γόμες σε σχήμα μοτοσικλέτας). Επιπλέον τα ίδια αντικείμενα σε ικανή, για τις ανάγκες της έρευνας, ποσότητα βρίσκονται σε ένα καλάθι.
- Κάρτες με χρώματα αντίστοιχα των διαμερισμάτων της κατασκευής που στη μια πλευρά τους υπάρχουν απεικονίσεις των αντικειμένων που βρίσκονται στο αντίστοιχο

διαμέρισμα, ενώ στην άλλη υπάρχουν εντολές που σχετίζονται με προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης.

- Ένα λούτρινο αρκουδάκι, ο Γουίνι, που δίνει εντολές για την πρόσθεση ή αφαίρεση αντικειμένων.
- Αριθμοκάρτες ροζ χρώματος από το 1 έως το 9 που βοηθούν τα παιδιά να θυμούνται τις ποσότητες που χειρίζονται κάθε φορά.

Εικόνα 1: Τα υλικά της δραστηριότητας

Ανάπτυξη της δραστηριότητας:

Τα παιδιά χωρίζονται σε δύο ομάδες και σκοπός είναι να κερδίσουν όσο το δυνατόν περισσότερες κάρτες. Το παιχνίδι τελειώνει όταν κάθε ομάδα απαντήσει σε έξι ερωτήσεις. Η δραστηριότητα αναπτύσσεται ως εξής: Η νηπιαγωγός επιλέγει διαδοχικά κάρτες διαφορετικού χρώματος. Κάθε κάρτα περιέχει μια εντολή που καλείται να εκτελέσει ο Γουίνι. Στην περίπτωση που ο παίκτης δυσκολεύεται να δώσει απάντηση, η ομάδα τον βοηθάει και αν η απάντηση είναι σωστή κερδίζουν την κάρτα που απεικονίζει το μικροαντικείμενο που βρίσκεται στο αντίστοιχο διαμέρισμα.

Οι κάρτες των εντολών περιέχουν προβλήματα αλλαγής κατάστασης. Οι πορτοκαλί κάρτες περιέχουν προβλήματα με άγνωστο το αποτέλεσμα, οι πράσινες προβλήματα με άγνωστο το δεύτερο προσθετέο και οι μπλε προβλήματα με άγνωστο τον πρώτο προσθετέο. Στη συνέχεια παρατίθενται παραδείγματα ερωτήσεων που περιέχουν οι κάρτες.

Παράδειγμα εντολής πορτοκαλί κάρτας: «Ο Γουίνι να βάλει άλλες δύο καραμέλες στο κουτί. Πόσες είναι τώρα οι καραμέλες που βρίσκονται μέσα στο κουτί;»

Το παιδί, αφού μετρήσει τις καραμέλες που υπάρχουν στο πορτοκαλί διαμέρισμα, τοποθετεί δύο ακόμη καραμέλες. Το καπάκι του διαμερίσματος κλείνει και ζητείται να βρεθεί ο αριθμός των καραμελών που περιέχονται τώρα στο πορτοκαλί διαμέρισμα.

Παράδειγμα εντολής πράσινης κάρτας: «Ο Γουΐνι να βάλει όσες μηχανές θέλει στο κουτί. Πόσες έβαλε;»

Αρχικά το παιδί μετράει τις γόμες που περιέχονται στο πράσινο διαμέρισμα. Στη συνέχεια τοποθετούνται και άλλες γόμες χωρίς το παιδί να γνωρίζει τον αριθμό τους. Ζητείται από τον παίκτη να μετρήσει τις συνολικές γόμες που περιέχει το κουτί και να βρει πόσες τοποθέτησε ο Γουίνι.

Παράδειγμα εντολής μπλε κάρτας: «Ο Γουίνι να βγάλει τέσσερις βόλους απ’ το κουτί. Πόσοι βόλοι ήταν στην αρχή μέσα στο κουτί;»

Σε αυτή την περίπτωση ο παίκτης δεν μετράει τον αρχικό αριθμό των βόλων που περιέχονται στο κουτί. Καλείται, μετά την αφαίρεση των τεσσάρων βόλων, να μετρήσει το συνολικό αριθμό βόλων και να προσδιορίσει τον αρχικό αριθμό τους.

Τα ευρήματα και η αξιολόγησή τους

(I) *Προβλήματα της μορφής Α+Β=Χ (πορτοκαλί χρώμα)*

Στην περίπτωση προβλημάτων με άγνωστο το αποτέλεσμα του αθροίσματος παρατηρήθηκαν οι εξής στρατηγικές:

Η κύρια επιτυχής στρατηγική είναι αυτή που αντιστοιχεί στο «σχήμα διαδοχής» που αναφέρθηκε στο θεωρητικό μας πλαίσιο. Για παράδειγμα:

> Ε (Ερευνήτρια): *Μέτρησε τις καραμέλες στο κουτί.*
>
> Ν (Νήπιο): *Είναι τέσσερις καραμέλες μέσα*
>
> (Ε): *Ο Γουίνι πρέπει να βάλλει τέσσερις καραμέλες στο κουτί. Βάλ’ τες εσύ. Πόσες καραμέλες είναι τώρα μέσα στο κουτί;*
>
> Ν: *Οκτώ.*
>
> (Ε): *Πως το ξέρεις; Μπορείς να μας εξηγήσεις;*
>
> Ν: *Ήταν τέσσερις* (δείχνει με τα δάχτυλα), *μέσα βάλαμε άλλες τέσσερις* (δείχνει άλλα τέσσερα δάχτυλα), *όλες μαζί: μια, δύο τρεις,..., οκτώ.*

Το επίπεδο κατανόησης των αριθμητικών πράξεων σε αυτή την εκπαιδευτική βαθμίδα, δεν επιτρέπει την ολική αποδέσμευση από την προσφυγή σε συγκεκριμένα αντικείμενα. Η βοηθητική χρήση των δακτύλων είναι πολύ συχνή (εικόνα 2). Ας παρακολουθήσουμε τη χρήση των δακτύλων σε ένα παράδειγμα αφαίρεσης. Ένα υποκείμενο αφού απαριθμήσει επτά καραμέλες καλείται, σύμφωνα με την εντολή, να βγάλει τρεις καραμέλες.

Ε: *Πόσες καραμέλες έμειναν;*

Ν: *Τέσσερις.*

Ε: *Πώς το βρήκες;*

Ν: *Ήταν επτά* (δείχνει επτά δάχτυλα), *βγάλαμε τρία* (κλείνει τρία δάχτυλα) *και μείνανε τέσσερα.*

Ε: *Πολύ σωστά.*

Εικόνα 2: Η χρήση δακτύλων στην αφαίρεση

(ΙΙ) *Προβλήματα της μορφής Α+Χ=Γ (πράσινο χρώμα)*

Εδώ, στις επιτυχείς απαντήσεις χρησιμοποιείται συνήθως η αντιστροφή των πράξεων: η πράξη της αφαίρεσης μετασχηματίζεται σε πράξη πρόσθεσης με τη διαδικασία της δοκιμής και του λάθους. Ας παρακολουθήσουμε το επόμενο απόσπασμα:

Ε: *Για δες πόσες μηχανές* (γόμες) *υπάρχουν στο κουτί;*

Ν: *1,2,3,4,5. Πέντε.*

Ε: *Η εντολή λέει: «Ο Γουίνι να βάλει κρυφά όσες μηχανές θέλει μέσα στο κουτί».*

Η ερευνήτρια βάζει δύο μηχανές.

Ε: *Πόσες μηχανές έβαλε;*

Ν:…

Ε: *Για μέτρησέ τες να δούμε πόσες είναι όλες.*

Το νήπιο μετράει επτά αντικείμενα.

Ε: *Μπορείς να βρεις πόσες έβαλε ο Γουίνι;*

Μετά από την αποτυχημένη προσπάθεια του συγκεκριμένου νηπίου, η ερευνήτρια καταφεύγει στη βοήθεια της ομάδας.

Ε: *Να μας βοηθήσει η ομάδα; Τι λέει ο Κώστας;*

Ν (Κώστας): *Δύο.*

Ε: *Ναι. Πώς το βρήκες;*

Ν: *Άμα έβαζε 1, θα ήταν 6, άμα έβαζε 2 θα ήταν 7.*

Ε: *Πολύ σωστά.*

Και εδώ η ανάγκη προσφυγής σε συγκεκριμένα αντικείμενα οδηγεί τα παιδιά στη χρήση των δακτύλων:

Ένα νήπιο μετράει επτά μηχανές που βρίσκονται μέσα στο κουτί.

Ε: *«Ο Γουίνι να βγάλει κρυφά όσες μηχανές θέλει απ' το κουτί». Πόσες μηχανές έβγαλε;* («Έβγαλε» τρεις μηχανές)

Το νήπιο μετράει τις μηχανές που απέμειναν στο κουτί και διαπιστώνει ότι απέμειναν τέσσερις.

Ε: *Πόσες μηχανές λοιπόν έβγαλε ο Γουίνι;*

Το νήπιο μετράει με τα δάχτυλα

Ν: (Μετράει με τα δάχτυλα) *τρεις.*

Ε: *Πώς το βρήκες;*

Το νήπιο δείχνει επτά δάχτυλα, κλείνει τα τρία και δείχνει τα τέσσερα που απομένουν.

Ε: *Πολύ Σωστά!*

(ΙΙΙ) *Προβλήματα της μορφής Χ+Β=Γ (μπλε χρώμα)*

Μια επιτυχής στρατηγική που χρησιμοποιείται εδώ είναι αυτή της αντιστροφής της πράξης της αφαίρεσης σε πράξη πρόσθεσης. Ας παρακολουθήσουμε τη στρατηγική αυτή στο επόμενο παράδειγμα:

Ε: *Βγάλε ένα βόλο απ' το κουτί. Μέτρησε, πόσοι είναι τώρα μέσα;*

Ν: *Έξι.*

Ε: *Πόσοι ήταν στην αρχή;*

Παρεμβαίνει ένα άλλο νήπιο.

Ν: *Στην αρχή ήταν επτά. Είναι έξι* (μας δείχνει τους βόλους που είναι ήδη στο κουτί), *βάζουμε ένα μέσα* (τοποθετεί τον βόλο μέσα) *και τώρα είναι επτά.*

Τα προνήπια κατανοούν τις θετικές και αρνητικές αλλαγές των ποσοτήτων, διαθέτοντας μια αναπτυγμένη ικανότητα πρόβλεψης, που θεωρείται μια σημαντική γνωστική λειτουργία για την επίλυση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης (Zur & Gelman 2004):

Ε: *Βγάλε 3 βόλους απ' το κουτί. Πόσοι ήταν στην αρχή μέσα στο κουτί; Μέτρησε τους βόλους που είναι μέσα.*

Προνήπιο: (Μετράει) *Είναι τέσσερις. Ένας, δύο, τρεις, τέσσερις.*

Ε: *Πριν ήταν περισσότεροι ή λιγότεροι, αφού έβγαλες τρεις;*

Ν: *Περισσότεροι.*

Ε: *Πόσοι ήταν;*

Κ: *Επτά.*

Ε: *Πώς το βρήκες αυτό;*

Ν:…

Η χωρική αναπαράσταση των ποσοτήτων αποδεικνύεται ως μια επιτυχής στρατηγική αντιμετώπισης προβλημάτων αυτής της μορφής. Εδώ, στη χωρική αναπαράσταση διευκολύνουν οι αριθμοκάρτες. Το παιδί σημειώνοντας τις κάρτες που αντιστοιχούν στα αντικείμενα που μπαίνουν στο κουτί, προσδιορίζει τον αριθμό αυτών που απομένουν και που δείχνουν τον αριθμό των αντικειμένων που υπήρχαν αρχικά στο κουτί. Ας παρακολουθήσουμε πως υλοποιείται η παραπάνω στρατηγική στο επόμενο παράδειγμα: Το παιδί αφού βάλει για λογαριασμό του Γουίνι δύο βόλους στο κουτί, απαριθμεί συνολικά επτά βόλους.

Ε: *Πόσοι βόλοι ήταν στην αρχή μέσα στο κουτί;*

Ν: *Ε,… ξέρω γω;*

Ε: *Λοιπόν ήταν κάποιοι, βάλαμε 2 και τώρα είναι 1,2,3,4,5,6,7. Πόσοι ήταν στην αρχή;*

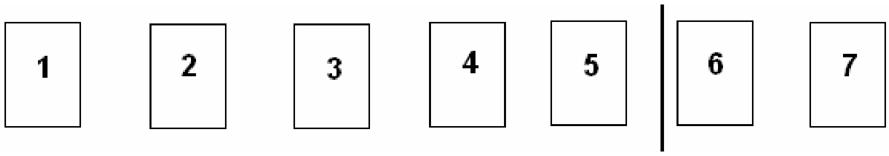
Ν:…

Ε: *Αυτές εδώ οι κάρτες με τους αριθμούς μήπως σε βοηθάνε* (δείχνει τις ροζ κάρτες); *Είναι επτά μέχρι εδώ, αυτοί πες ότι είναι οι βόλοι, και ο Γουίνι έβαλε δύο.*

Ν: *Ξέρω πόσοι ήταν, πέντε;*

Ε: *Για έλα εδώ να μας το δείξεις πως το βρήκες.*

Ν: *Επειδή έβαλε δύο* (δείχνει τις κάρτες με τους αριθμούς 6 και 7, σχήμα 1), *ήταν ένας, δύο, τρεις, τέσσερις. Άμα έβαζε έναν θα ήταν ένας, δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε, έξι.*



Σχήμα 1: Χωρική αναπαράσταση των ποσοτήτων

Σε μια παραλλαγή της προηγούμενης χωρικής αναπαράστασης των ποσοτήτων, μετά από καθοδήγηση της ερευνήτριας, χρησιμοποιούνται οι ίδιοι οι βόλοι. Το νήπιο βάζει τέσσερις βόλους στο κουτί και μετράει σύνολο οκτώ βόλους.

Ε: *Πόσοι βόλοι ήταν στην αρχή μέσα στο κουτί;*

Ν:…

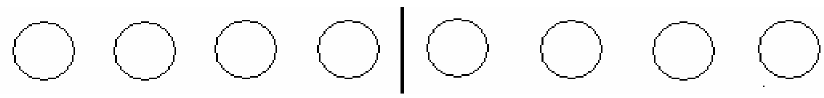
Ε: *Βγάλε όλους τους βόλους από το κουτί και άπλωσε τους.*

Ε: *Εσύ έβαλες τέσσερις βόλους στο κουτί. Τώρα είναι όλοι αυτοί* (δείχνει τους οκτώ βόλους). *Πόσοι ήταν στην αρχή;*

Ν: *Τέσσερις είναι!*

Ε: *Γιατί;*

Ν: *Εδώ ήταν τέσσερις* (ξεχωρίζει τέσσερις βόλους, σχήμα 2) *και βάλαμε εμείς αυτούς τους τέσσερις και τώρα είναι οκτώ.*



Σχήμα 2: Μια άλλη μορφή της χωρικής αναπαράστασης

Σύνοψη-συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε μια επισκόπηση των ερευνών της μαθηματικής εκπαίδευσης στην αντιμετώπιση προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης από παιδιά προσχολικής εκπαίδευσης. Επιπλέον, τα εμπειρικά δεδομένα της παρούσας έρευνας ανέδειξαν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης αντίστοιχες με αυτές που επισημαίνονται στο θεωρητικό μας πλαίσιο.

Οφείλουμε να παραδεχτούμε ότι οι παρατηρούμενες συμπεριφορές αντιμετώπισης των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης που παρουσιάστηκαν εδώ δε μπορεί να εξαντληθούν στο μικρό δείγμα της έρευνας, ούτε επίσης και προσφέρεται η δυνατότητα για γενικεύσεις. Μπορούμε εν τούτοις να σκιαγραφήσουμε τα χαρακτηριστικά μιας συστηματικής μελλοντικής έρευνας, καθώς και το περίγραμμα πιθανών διδακτικών παρεμβάσεων.

Ένα πρώτο σημείο σύγκλισης της σύγχρονης έρευνας στη μαθηματική εκπαίδευση είναι ο ισχυρισμός ότι τα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης, στις μορφές που τα πραγματευτήκαμε εδώ, μπορεί να αποτελέσουν αντικείμενο διδασκαλίας στην προσχολική εκπαίδευση. Παράλληλα όμως, τονίζεται και ο ουσιώδης ρόλος μιας δεύτερης παραδοχής: η προσέγγιση των μαθηματικών εννοιών πρέπει να λαμβάνει χώρα σε ένα πλαίσιο συμφραζομένων, τέτοιο που να είναι πλούσια νοηματοδοτημένο για τα παιδιά και να σχετίζεται με τις εμπειρίες τους. Η άποψη αυτή απαντάται σε πολλές σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις. Αναφέρουμε ενδεικτικά την αποκαλούμενη «ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση» (realistic mathematics education) (Van den Brink 2000, Wubbels, et al. 1997, Zacharos, et al. 2006), όπου το κύριο διδακτικό ενδιαφέρον εστιάζεται στη διαδικασία της οικοδόμησης, από τα ίδια τα παιδιά, της επιδιωκόμενης γνώσης. Η άποψη αυτή αντανακλά μια μετατόπιση του ενδιαφέροντος της μαθηματικής εκπαίδευσης, από τα μαθηματικά ως ένα σώμα δημιουργημένων από τους μαθηματικούς γνώσεων που οφείλουμε να τα οικειοποιηθούμε ως έχουν, στα μαθηματικά σαν ένα αντικείμενο που πρέπει να δημιουργηθεί με την ενεργή εμπλοκή των παιδιών. Η προσέγγιση αυτή δεν ενδιαφέρεται ιδιαίτερα για την εργαλειακή πλευρά της γνώσης και δίνει έμφαση στο πλαίσιο εντός του οποίου διαδραματίζεται η μάθηση. Όμως, κάθε πρόβλημα που παρουσιάζεται σε ένα πλαίσιο αναγνωρίσιμων συμφραζομένων δεν αποτελεί πάντα και ένα ρεαλιστικό πρόβλημα. Κριτήριο για να θεωρηθεί ως τέτοιο είναι να μπορεί να βρίσκεται στις πιθανές εμπειρίες του μαθητή και στα προσωπικά του ενδιαφέροντα. Τέτοιες είναι συχνά οι περιπτώσεις προβλημάτων που προκύπτουν από την ενασχόληση των παιδιών με χειροτεχνικές εργασίες ή με παιγνίδια αντίστοιχα με αυτά της έρευνάς μας. Η διδασκαλία λοιπόν των μαθηματικών εννοιών στην προσχολική εκπαίδευση οφείλει να προσανατολιστεί στη δημιουργία διδακτικών καταστάσεων αυτής της μορφής.

Βιβλιογραφία

Cohen, L. & Manion, L. (1994), *Μεθοδολογία εκπαιδευτικής έρευνας,* Μεταίχμιο, Αθήνα.

Hudson, T. (1983), Correspondences and numerical differences between sets, *Child Development*, 54, 84-90

Hughes M (1986), *Children and Number,* Oxford, Basil Blackwell.

Nunes, T. & Bryant, P. (1996), *Children Doing Mathematics,* Blackwell Publishers.

Resnick, L. (1983), A Developmental Theory of Number Understanding. In H. Ginsburg (Ed.), *The Development of Mathematical Thinking,* pp. 109-151, Orlando, Fla.: Academic Press.

Shane, R. (1999), *Making Connections: A "Number Curriculum" for Preschoolers,* Applied Image.

Van den Brink, F. J. (2000), Η ρεαλιστική αριθμητική στην εκπαίδευση για τα μικρά παιδιά, στο Ε. Κολέζα (επιμ.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση,* pp. 83-100, Leader Books, Αθήνα.

Vergnaud, G. (1979), Didactics and acquisition of "multiplicative structures" in secondary schools, In Archenhold W., et. al (Eds.), *Cognitive Development Research in Science and Mathematics*, pp. 190- 201.

Vergnaud, G. (1983), Multiplicative Structures. In Richard Lesh & Marsha Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, pp. 127-174, Academic Press.

Wubbels, T., Korthagen, F., and Broeman, H. (1997), Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 32, 1-28.

Zacharos, K., Androni, C., Dimitracopoulou, H. (2006), Paramètres Sociaux et Culturels Dans L'Enseignement des Mathématiques Générales a L' Ecole Maternelle en Grèce, *Carrefours de l'Education,* 21, 45-60.

Zur, O. & Gelman, R. (2004), Young children can add and subtract by predicting and checking, *Early Childhood Research Quarterly*, 19, 121-137.