Σχέσεις Μαθηματικών και Φυσικής: Μια εμπειρική έρευνα για την δυνατότητα γραφικής αναπαράστασης της έννοιας του διαστήματος από μαθητές της Α' Λυκείου[1]

Κώστας Ζαχάρος

Ο διαχωρισμός της μαθηματικής επιστήμης και της διδασκαλίας τους, από την ανάπτυξη των άλλων επιστημών φαίνεται να ευθύνεται σε μεγάλο βαθμό για παιδαγωγικά και επιστημολογικά εμπόδια που διαπιστώνονται κατά την διδασκαλία τους στην σχολική αίθουσα.

Οι διαπιστώσεις αυτές έχουν οδηγήσει στην αναγκαιότητα για την επανεξέταση του τρόπου διδασκαλίας της μαθηματικής επιστήμης. Επισημαίνεται πως, ο διαχωρισμός των διαφόρων επιστημονικών κλάδων, άν και εξυπηρετεί πρακτικές ανάγκες, αποτελεί στην ουσία μια παραπλάνηση και μια διαστρέβλωση της αληθινής γνώσης και "κάθε ανάμιξη ή επικάλυψη, όπου αυτή είναι εφικτή και παιδαγωγικά χρήσιμη, είναι επιθυμητή και ευπρόσδεκτη" [Kline, M., 1990, σελ. 207].

Στην έρευνα μας θα ασχοληθούμε με την διαπραγμάτευση της έννοιας του διαστήματος. Η έννοια αυτή προσφέρεται, κατά την άποψή μας, προκειμένου να αναδείξουμε την διαπλοκή Μαθηματικών και Φυσικών γνώσεων. Αναλυτικότερα, η εργασία μας θα ασχοληθεί με τα ακόλουθα θέματα:

- Θα αξιολογήσει το επίπεδο κατανόησης κάποιων βασικών Μαθηματικών και Φυσικών γνώσεων που εμπλέκονται στην αντιμετώπιση της έννοιας του διαστήματος.
- Θα προσπαθήσουμε να διερευνήσουμε γνωστικά προβλήματα, ιδιαίτερα προβλήματα που σχετίζονται με τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων καθώς και την δυνατότητα "ανάγνωσης" των γραφικών παραστάσεων.
- Προσπαθούμε να καταγράψουμε τα διδακτικά αποτελέσματα της κοινής διαπραγμάτευσης εννοιών που, παρόλες τις διαφορές τους έχουν στενή συνάφεια και εντάσσονται σε μια ευρύτερη *εννοιολογική περιοχή* (conceptual field). Παράλληλα διερευνούμε τις διδακτικές συνέπειες της προσέγγισης της έννοιας του διαστηματος μέσα από την αναφορά στην ιστορία της εξέλιξης της έννοιας αυτής.
- Ελέγχουμε, την αλήθεια της υπόθεσης, σύμφωνα με την οποία, οι γραφικές παραστάσεις δύο μεγεθών σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι ένα αυτόνομο πολιτισμικό "εργαλείο" και συνεπώς για την οικειοποίηση της γνώσης αυτής απαιτείται ιδιαίτερη διδακτική προσπάθεια. Η υπόθεση αυτή μας παραπέμπει σε παρόμοιες εργασίες [Saljo, R., 1994] που το ψυχολογικό τους υπόβαθρο αντλείται από το θεωρητικό έργο του Σοβιετικού ψυχολόγου L. Vygotsky.
- Τέλος, μέσα από την εξέταση θεμάτων από τα Μαθηματικά και την Φυσική, που ειναι ισοδύναμα, όσον αφορά το μαθηματικό τους περιεχόμενο, προσπαθούμε να αναδείξουμε την αναγκαιότητα κάποιων ειδικών διδακτικών παρεμβάσεων.

Θεωρητική προβληματική

[1] Ζαχάρος, Κ. (1997). Σχέσεις Μαθηματικών και Φυσικής: Μια εμπειρική έρευνα για την δυνατότητα γραφικής αναπαράστασης της έννοιας του διαστήματος από μαθητές της Α' Λυκείου, *Σύγχρονη Εκπαίδευση,* 95, σ. 59-67.

Οι περισσότερες διαφωνίες στις πρόσφατες επιστημολογικές διαμάχες, που μοιάζουν θεμελιακές, είναι, αν η ανάπτυξη της γνώσης είναι μια κοινωνική ή είναι μια γνωστική (cognitive) διαδικασία. Επιστημολόγοι και ψυχολόγοι της μάθησης με κοινωνική - πολιτισμική κατεύθυνση, αντιλαμβάνονται τις ανώτερες πνευματικές διαδικασίες ως κοινωνικά καθοριζόμενες. Έτσι, είναι δημιουργικό από διδακτική σκοπιά να ασχολούμαστε κάθε φορά με το ιδιαίτερο περιεχόμενο της γνώσης, όπως αυτή συγκροτείται στο κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο ανάπτυξής της.

Στην προσέγγιση αυτή τονίζεται η σημασία της κοινωνικής και πολιτισμικής προοπτικής στην γνωστική ανάπτυξη. Η κοινωνική διαμεσολάβηση και η χρήση των πολιτισμικών "εργαλείων" είναι "κεντρικό πρόβλημα της ερμηνείας όλων των ανώτερων μορφών συμπεριφοράς, ... με την βοήθεια των οποίων μαθαίνει ο άνθρωπος να κυριαρχεί στην συμπεριφορά του" και "όλες οι ανώτερες ψυχικές λειτουργίες περιέχουν το κοινό χαρακτηριστικό ότι είναι διαμεσολαβημένες διαδικασίες, δηλ. ότι εμπεριέχουν στην δομή τους την *χρήση ενός σημείου ως μέσου* για την καθοδήγηση και κυριάρχηση των ψυχικών διαδικασιών" [Βυγκότσκι, 1988, σελ. 14].

Σε ανάλογο πνεύμα η κονστρακτιβιστική (constructivist) προοπτική μάθησης και ιδιαίτερα ο κοινωνικός κονστρακτιβισμός [Simon, 1995], υποστηρίζει πως οι ρυθμίσεις και οι νόρμες της μαθηματικοποίησης μέσω της κοινωνικής αλληλεπίδρασης φέρνουν την ψυχολογία και την κοινωνία μαζί και επιβάλλουν την ενασχόληση με το ιδιαίτερο κάθε φορά αντικείμενο της γνώσης.

Οι γραφικές παραστάσεις και γενικότερα η χρήση των δυδιάστατων πινάκων είναι πολιτισμικά εργαλεία γραφής που η κατοχή τους προϋποθέτει την εξοικείωση με τις κατάλληλες ερμηνευτικές διαδικασίες κατά την "ανάγνωση" τους. Η ερμηνευτική ικανότητα δεν είναι ούτε έμφυτη ούτε καθολική. Προϋποθέτει μια διαδικασία μάθησης ώστε να γίνει δυνατή η οικειοποίηση του πολιτισμικού αυτού εργαλείου [Saljo, R., 1994].

Η αναγκαιότητα της αναζήτησης των ειδικών γνώσεων και των ικανοτήτων που σχετίζονται με τις καταστάσεις και τα προβλήματα που υπάρχουν κατά την διάρκεια της μάθησης οδήγησαν στην εισαγωγή της έννοιας του *" εννοιολογικού πεδίου"* (conceptual field) [Vergnaud, 1983]. Το εννοιολογικό πεδίο είναι ένα σύνολο καταστάσεων και προβλημάτων στις οποίες συνυπάρχουν έννοιες, διαδικασίες και αναπαραστάσεις, που παρόλες τις διαφορές τους έχουν στενή συνάφεια. Ο Vergnaud, αιτιολογεί την αναγκαιότητα της ύπαρξης ενός τέτοιου πλαισίου υποστηρίζοντας πως, πολλές φορές, είναι δύσκολο και ανόητο να μελετούνται χωριστά έννοιες που έχουν συνάφεια. Θεωρεί, πως όταν προσεγγίζουμε ψυχογενετικά μια ειδική γνώση είναι προτιμότερο να αναφερόμαστε σε ευρείες περιοχές της γνώσης που να καλύπτουν μια ποικιλία καταστάσεων και διαφορετικά είδη και επίπεδα ανάλυσης. Το ενδιαφέρον της ανωτέρω προσέγγισης εστιάζεται κύρια σε δύο περιοχές: τις προσθετικές και τις πολλαπλασιαστικές δομές. Αν και οι πολλαπλασιαστικές δομές αποτελούν μέρος των προσθετικών δομών αποτελούν εντούτοις, ένα ιδιαίτερο αντικείμενο μελέτης.

Θα πρέπει να διευκρινίσουμε ότι η έννοια της "δομής" εδώ έχει μια πλατιά σημασία και αναφέρεται στον χώρο αναφοράς των προβλημάτων [Vergnaud, 1979].

Στις πολλαπλασιαστικές δομές, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην παρούσα έρευνα, εντάσσονται όλες οι κατηγορίες των καταστάσεων και των προβλημάτων που για την λύση τους χρειάζονται πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις. Ως παράδειγμα "πολλαπλασιασμού" μπορούμε να αναφέρουμε το εμβαδό, τον όγκο, το καρτεσιανό γινόμενο, το διάστημα, κλπ.

Μια υπόθεση που οι έρευνες αναδεικνύουν [Vergnaud, 1979] είναι ότι, ο "πολλαπλασιασμός" είναι μια δύσκολη έννοια και δεν κατανοείται ικανοποιητικά εως ότου είναι δυνατό να αναλυθεί σαν μια διπλή ή τριπλή αναλογία και μέχρι ότου κάποια είδη ανάλυσης κατανοηθούν, τουλάχιστον διαισθητικά.

Επίσης, η προσπάθεια ανάλυσης των διδακτικών δυσκολιών που σχετίζονται με την αρίθμηση και την μέτρηση ποσοτήτων, ειδικότερα η σύνθεση δύο μαθηματικών ποσοτήτων σε μια τρίτη, μπορεί να αποδοθεί σχηματικά με δύο τύπους: την "*σύνθεση της διατηρημένης αναφοράς"* (referent preserving composition) και την "*σύνθεση της μετασχηματισμένης αναφοράς"* (referent transforming composition) [Schwartz, 1989]. Ως συνθέση της διατηρημένης αναφοράς θεωρούμε την σύνθεση κατά την οποία οι αριθμητικές πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης εμπλέκουν δύο όμοιες ποσότητες για την δημιουργία μιας τρίτης όμοιας με τις προηγούμενες. Ενώ, στην σύνθεση με την μετασχηματισμένη αναφορά, δύο όμοιες ή ανόμοιες ποσότητες συνθέτονται για την κατασκευή μιας τρίτης στην οποία, γενικά, καμία αναφορά δεν γίνεται στις προηγούμενες. Τέτοιες συνθέσεις είναι όσες εμπλέκουν τον πολλαπλασιασμό και την διαίρεση.

Σύμφωνα με την ανωτέρω ανάλυση η έννοια του διαστήματος εντάσσεται στην κατηγορία της σύνθεσης με την μετασχηματισμένη αναφορά, αφού αριθμητικά προκύπτει από το γινόμενο στο οποίο εμπλέκονται η ταχύτητας (υ) και ο χρόνος (t).

Η παιδαγωγική στρατηγική της διδασκαλίας συνθέσεων της μετασχηματισμένης αναφοράς όταν βασίζεται στην επέκταση του μοντέλου της διδασκαλίας των συνθέσεων με την διατηρημένη αναφορά, προσκρούει σε διδακτικά εμπόδια, αφού παραβλέπει το ουσιώδες χαρακτηριστικό ότι, η περίπτωση της σύνθεσης με την μετασχηματισμένη αναφορά δίνει ένα μέγεθος μιας νέας ποσότητας.

Τα προβλήματα που εμπλέκουν τις τρεις μεταβλητές, το διάστημα, την ταχύτητα και τον χρόνο, μας προφέρουν πλούσιες δυνατότητες για μια Γεωμετρική αντιμετώπιση των θεμάτων αυτών. Παράλληλα η προσέγγιση αυτή δίνει την δυνατότητα μιας *ιστορικής* εκτίμησης του πως εξελίσσονται τα μαθηματικά.

Η αξιοποίηση της ιστορικής προοπτικής κατά την διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών διευκολύνει στην πληρέστερη κατανόησή τους.

Παρόλο που τα περισσότερα βιβλία των μαθηματικών μας κάνουν να πιστεύουμε πως, οι μαθηματικοί ασχολούνται μόνο με τυπικές και αυστηρές αποδείξεις βασισμένες σε αξιώματα, οι μαθηματικοί συχνά εργάζονται με διαισθητικές, ή εμπειρικές μεθόδους. Στην πραγματικότητα, η διαδικασία παραγωγής των μαθηματικών είναι εντελώς διαφορετική από τον παραγωγικό τρόπο της παρουσίασης τους. Στην διαδικασία δημιουργίας των μαθηματικών, τίθενται προβλήματα, αναλύονται παραδείγματα, γίνονται υποθέσεις, προσφέρονται αντιπαραδείγματα και υποθέσεις αναθεωρούνται. Επειδή τα μαθηματικά εμφανίζονται από τους μαθηματικούς τυποποιημένα σε θεωρήματα και αποδείξεις, αυτή η αυστηρή διαδικασία εμφανίζεται λαθεμένα σαν ο πυρήνας της μαθηματικής πρακτικής. Έτσι η μάθηση των μαθηματικών φαίνεται να είναι η ικανότητα αυτής της τυποποίησης. Η παρουσίασή τους εξαφανίζει την πνευματική δραστηριότητα από την οποία έχουν παραχθεί [Battista, Clements, 1995 και Hoffer, 1981].

Όπως αναφέρθηκε προηγούμενα, η γραφική απεικόνιση και διαπραγμάτευση της έννοιας του διαστήματος και της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου, αποτελεί μια ουσιώδη εισαγωγή στον ολοκληρωτικό και διαφορικό λογισμό. Κατά ορισμένες απόψεις [Crites, 1995], δεν θα ήταν υπερβολή να λέγαμε ότι δεν θα υπήρχε το ολοκλήρωμα άν οι μαθηματικοί δεν έβλεπαν το διάστημα μέσα από μια Γεωμετρική προοπτική. Γιατί οι ρίζες του ολοκληρώματος, πριν οριστεί αυστηρά από τον Cauchy και άλλους, μετά την εξέλιξη της ανάλυσης τον 19ο αιώνα , βρίσκονται περισσότερο σε μια διαισθητική αντίληψη που εδράζεται στην Γεωμετρία και ανέπτυξε με επιτυχία αρκετά νωρίς (1350), ο Nicole Oresme [Pedersen, 1974 και Boyer, 1949]. Παρόλο που η μέθοδος του βασίστηκε σε ελλειπείς μαθηματικές βάσεις, το ορισμένο ολοκλήρωμα που χρησιμοποιήθηκε αργότερα, βασίστηκε στην ίδια λογική.

Μέθοδος, δείγμα και διαδικασία συλλογής εμπειρικών δεδομένων.

Τα επιχειρησιακά ερωτήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε και τα οποία μας "επιβάλλουν" στον πειραματικό σχεδιασμό την επιλογή των κατάλληλων οργάνων συλλογής των εμπειρικών δεδομένων, είναι τα εξής:
Πρώτον, ποιός είναι ο βαθμός οικειοποίησης από τους μαθητές της Α' τάξης του Λυκείου γνώσεων, για την αντιμετώπιση προβλημάτων του διαστήματος καθώς και μαθηματικών γνώσεων που εμπλέκονται σ' αυτά.
Δεύτερον, έλεγχος της υπόθεσής μας σύμφωνα με την οποία, η γραφική απεικόνιση στο καρτεσιανό σύστημα είναι ένα αυτόνομο πολιτισμικό εργαλείο και ως εκ τούτου η πρόσκτησή του δεν είναι άμεση συνέπεια της συγκρότησης των γνωστικών δομών του υποκειμένου, αλλά προϋποθέτει διδασκαλία και εξοικείωση.
Τρίτον, πόσο δημιουργικό είναι από διδακτική άποψη η κοινή διαπραγμάτευση εννοιών που έχουν μια στενή συνάφεια και εντάσονται στο ίδιο εννοιολογικό πεδίο (conceptual field).
Τέταρτον, πόσο είναι δυνατή η γενίκευση του γνωστικού σχήματος που οικειοποιούνται οι μαθητές στην περίπτωση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης και για άλλες περιπτώσεις.
Πέμπτον, εκτίμηση και σύγκριση της δυνατότητας χειρισμού μαθηματικών και φυσικών θεμάτων που είναι ισοδύναμα, όσον αφορά την μαθηματική μορφή τους.

Το δείγμα

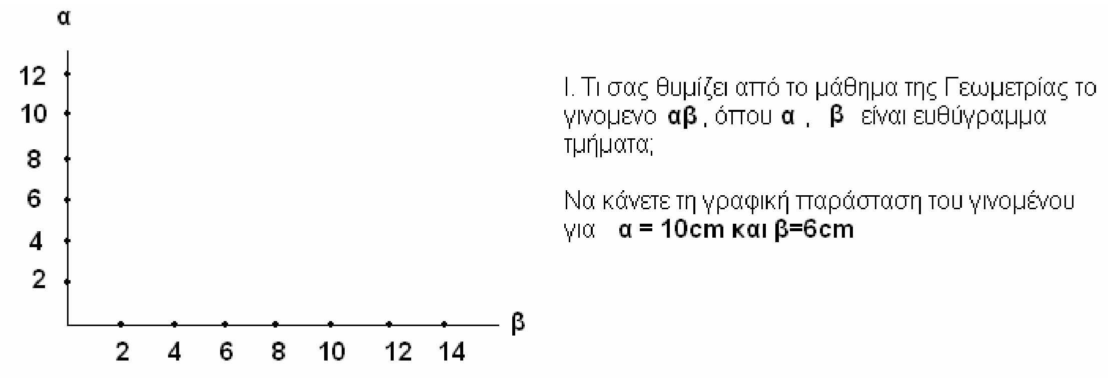
Το δείγμα μας συγκροτήθηκε με τυχαίο τρόπο από 22 μαθητές της Α' Λυκείου του 1ου ΤΕΛ Δραπετσώνας. Κριτήριο για την επιλογή μαθητών της Α' Λυκείου στην συγκρότηση του δείγματος είναι το γεγονός ότι, οι μαθητές αυτοί διδάσκονται στο μάθημα της Φυσικής την έννοια του διαστήματος στην ευθύγραμμη κίνηση και στο μάθημα των Μαθηματικών, την γραφική απεικόνιση γραμμικών συναρτήσεων σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Επιπλέον, έχουν διδαχθεί σε προϋγούμενες τάξεις τρόπους προσδιορισμού του εμβαδού βασικών Γεωμετρικών σχημάτων.

Διαδικασία συλλογής των εμπειρικών δεδομένων

Αφού οι μαθητές είχαν ήδη διδαχθεί στο μάθημα της Φυσικής την έννοια του διαστήματος και τρόπους προσδιορισμού του, μετά από χρονικό διάστημα ενός μήνα περίπου, υποβλήθηκαν στην διαδικασία των ατομικών συνεντεύξεων. Η μέθοδος αυτή μας δίνει την δυνατότητα να βαθύνουμε την ανάλυση μας πάνω στην κατανόηση κάθε ιδιαίτερης έννοιας και μας δίνει πληροφορίες για τις συντελούμενες νοητικές ενέργειες [Χασάπης, 1991]. Τα θέματα που δόθηκαν στους μαθητές αντλήθηκαν από τα σχολικά βιβλία και χρησιμοποιήθηκε η ίδια λεκτική και συμβολική διατύπωση.

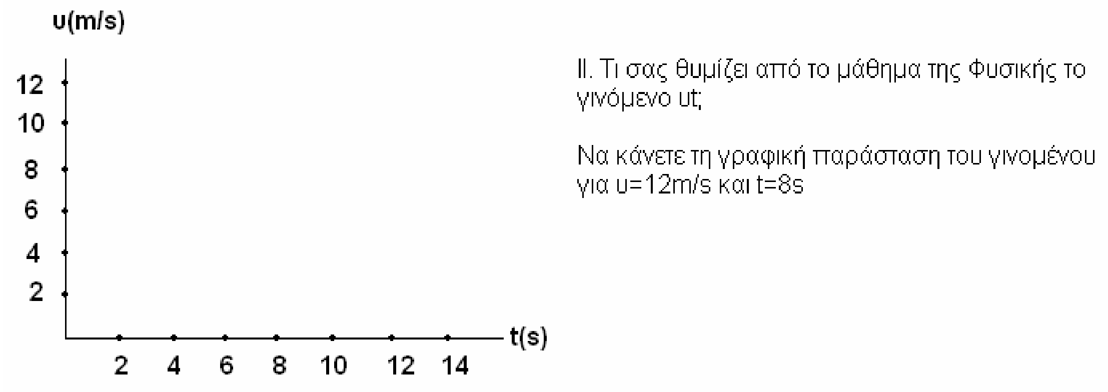
Εκτός από τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών, οι διάλογοι των συνεντεύξεων μαγνητοφωνήθηκαν και στην συνέχεια υποβλήθηκαν σε ποιοτική αξιολόγηση. Οι συνεντεύξεις περιείχαν την εξέταση 8 θεμάτων (παράρτημα).

Στο **θέμα Ι** περιέχεται η γεωμετρική ερμηνεία του γινομένου δύο ευθειγράμμων τμημάτων καθώς και η γραφική απεικόνισή τους σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (σχ. 1).

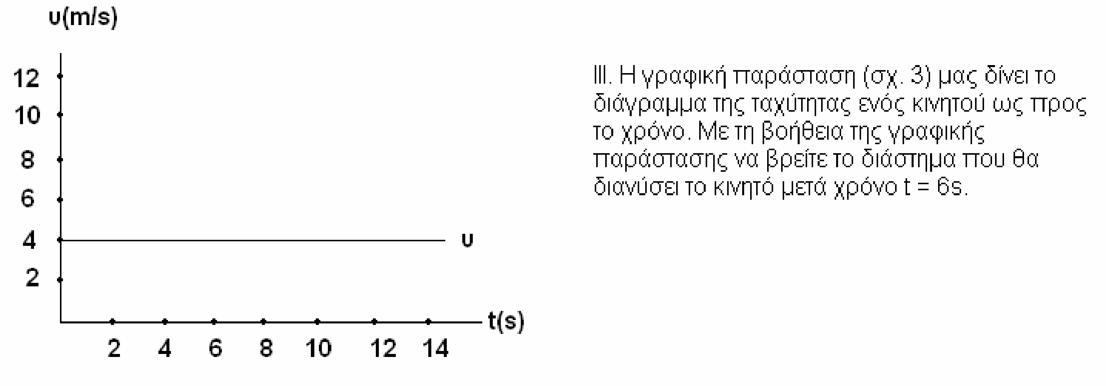


Σχήμα 1

Τα **θέματα ΙΙ και ΙΙΙ** αξιολογούν την δυνατότητα των μαθητών να αναπαράγουν σε απλά προβλήματα εύρεσης του διαστήματος, που αντλούνται από το σχολικό βιβλίο της Φυσικής, με την χρήση των σχετικών τύπων και με την μέθοδο της γραφικής αναπαράστασης. Με τα θέματα IV και VI θέλουμε να ελέγξουμε την δυνατότητα των μαθητών να ανταποκριθούν σε θέματα των Μαθηματικών που εμπλέκονται στην γραφική απεικόνιση της ταχύτητας και του διαστήματος (σχήματα 2 και 3).

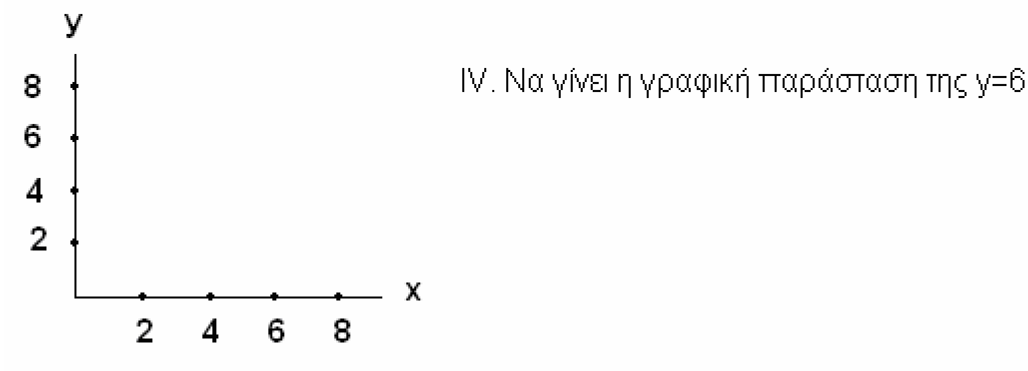


Σχήμα 2

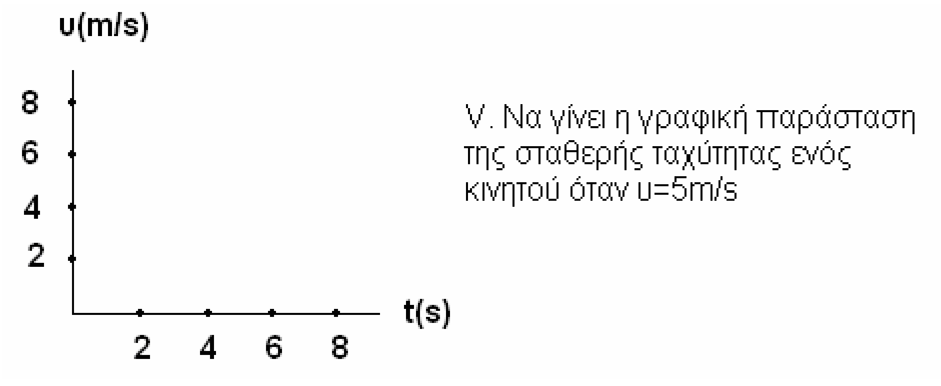


Σχήμα 3

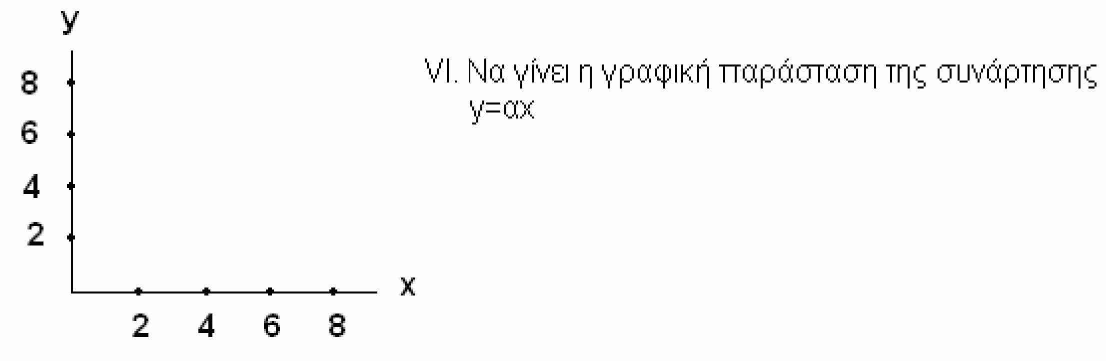
Επιπλέον, με τα **θέματα IV, V, VI και VII** συλλέξαμε δεδομένα σχετικά με την ικανότητα των μαθητών να εφαρμόζουν μια μέθοδο μάθησης σε θέματα μαθηματικών και φυσικής ισοδύναμα, όσον αφορά την μαθηματική μορφή τους. Έτσι, στο μαθηματικό θέμα IV αντιστοιχίσαμε το *ισομορφικό* (isomorphic) [Hofman - Wolf, 1987] θέμα V από την φυσική και στο θέμα VI, το θέμα VII (σχήματα 4, 5 και 6).



Σχήμα 4

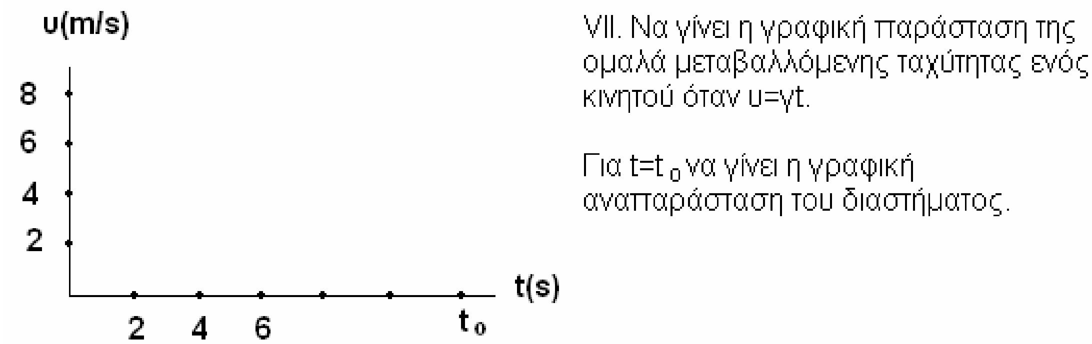


Σχήμα 5

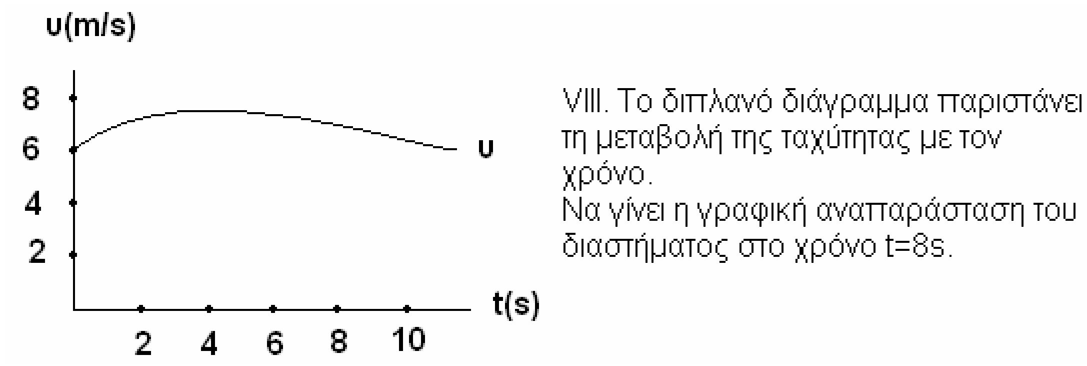


Σχήμα 6

Τέλος, με τα **θέματα VII και VIII,** διερευνούμε τις δυνατότητες γενίκευσης του γνωστικού σχήματος που οικοδομείται από τους μαθητές στην διάρκεια της συνέντευξης (σχήματα 7 και 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Δεν περιοριστήκαμε μόνο στην αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών, αλλά, μέσα από υποδείξεις και "διδασκαλία" παρακολουθήσαμε τους μαθητές στην σταδιακή προσπάθεια οικοδόμησης της γνώσης που σχετίζεται με την γραφική αναπαράσταση της έννοιας του διαστήματος και γενικότερα μεγεθών που ορίζονται ως γινόμενο δύο μεγεθών.

Τα αποτελέσματα της έρευνας

Όπως ήδη αναφέραμε τα 22 υποκείμενα (Υ1 - Υ22) που συμμετείχαν στις ατομικές συνεντεύξεις, καλούνται να απαντήσουν σε οκτώ θέματα, δίνοντας ιδιαίτερη βαρύτητα στην δυνατότητα χρήσης των γραφικών παραστάσεων. Οι μαθητές ενθαρρύνονται σε κάθε προσπάθεια τους και όταν δηλώνουν άγνοια ή δίνουν λανθασμένες απαντήσεις, τους γίνονται υποδείξεις ώστε να προχωρήσουν στο επόμενο στάδιο. Για παράδειγμα, όταν αποτυγχάνουν να αναπαραστήσουν γραφικά το διάστημα υt, τους προτείνεται η αντικατάσταση: α -> υ και β -> t στο εμβαδό αβ του Ιου θέματος. Αν παρόλες τις υποδείξεις οι μαθητές δεν δίνουν τις σωστές απαντήσεις, θεωρούμε πως απέτυχαν στο συγκεκριμένο έργο. Μια ποσοτική καταγραφή των αποτελεσμάτων των συνεντεύξεων παρουσιάζεται στο πίνακα 6.

Θέμα		Επιτυχία Συχνότητες (%)	Αποτυχία Συχνότητες (%)	Συν.
I [αβ]	Γεωμ. ερμηνεία	10 (45%)	12 (55%)	22
	Γραφική παρ.	9 (41%)	13 (59%)	22
II [s = υt]	Χρήση τύπων	18 (82%)	4 (18%)	22
	Γραφική παρ.	10 (45%)	12 (55%)	22
III [εύρεση του s για υ = 4m/s και t= 6s]	Χρήση τύπων	18 (82%)	4 (18%)	22
	Γραφική παρ.	17 (77%)	5 (23%)	22
IV [ψ = 6]	Γραφική παρ.	7 (32%)	15 (68%)	22
V [υ = 5m/s]	Γραφική παρ.	16 (73%)	6 (27%)	22
VI [ψ = αχ]	Γραφική παρ.	9 (41%)	13 (59%)	22
VII [υ = γt]	Γραφική παρ.	16 (73%)	6 (27%)	22
	Εύρεση s για to	10 (45%)	12 (55%)	22
VIII [υ μη ομαλά μεταβαλόμενη]	Γραφική παρ.	11 (50%)	11 (50%)	22

Ποσοτική καταγραφή των αποτελεσμάτων των συνεντεύξεων
Πίνακας 1

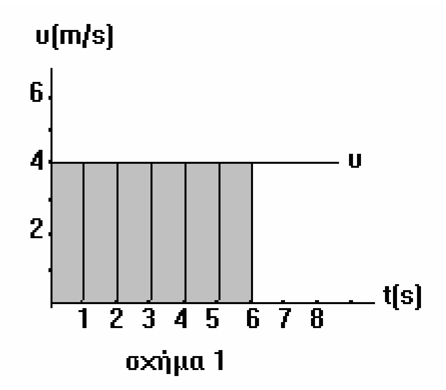
Παρατηρήσεις στα αποτελέσματα των συνεντεύξεων και ερμηνευτική προσέγγιση:

- Στο **Θέμα Ι** διαπιστώσαμε την δυσκολία των μαθητών να ερμηνεύσουν, στηριζόμενοι στις γνώσεις τους από το μάθημα της Γεωμετρίας, την γεωμετρική σημασία του γινομένου αβ (το 55% αυτών αποτυγχάνει). Επιπλέον αδυνατούν να δώσουν την γραφική του απεικόνιση σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων (το 59% αυτών). Μάλιστα δύο από τους αποτυχόντες απεικονίζει γραφικά το γινόμενο ως σημείο (6, 10) και ένας ως ευθεία της μορφής ψ = αχ που διέρχεται από το σημείο (6, 10). Αυτό που προκύπτει από τις συνεντεύξεις είναι ότι, εκτός από ελάχιστους μαθητές που δεν γνωρίζουν μεθόδους για τον υπολογισμό του εμβαδού ορθογωνίου, στην πλειοψηφία τους αντιμετωπίζουν προβλήματα όταν οι όροι και η διατύπωση στο πρόβλημα του υπολογισμού του εμβαδού του ορθογωνίου τροποποιηθούν, όπως στο θέμα I.

- Στο **Θέμα II** η αποτυχία των μαθητών εντοπίζεται στην γραφική αναπαράσταση του εμβαδού (55%). Είναι χαρακτηριστικό πως 9 από τους 12 αποτυχόντες (δηλαδή το 75% των αποτυχόντων) απεικονίζουν το διάστημα ως ευθεία της μορφής ψ = αχ, που διέρχεται από το σημείο (8, 12), ενώ οι 3 απ' αυτούς ως το σημείο (8, 12). Παρόλο που στους αποτυχόντες στην γραφική αντιμετώπιση του θέματος II (s = υt) προτείνεται η αντικατάσταση α ->υ και β -> t στο γινόμενο αβ που γεωμετρικά παριστάνει εμβαδό, αρκετοί μαθητές αδυνατούν να γενικεύσουν. Πρέπει εδώ να τονιστεί πως η παρουσίαση στο καρτεσιανό σύστημα ενός διανυσματικού μεγέθους, ως επιφάνειας, δημιουργεί ένα διδακτικό εμπόδιο, ιδιαίτερα όταν αναφέρονται οι μονάδες μέτρησης. Γιατί δεν πρέπει να διαφεύγει της προσοχή μας πως η γεωμετρική απεικόνιση της έννοιας του διαστήματος ως επιφάνειας, έννοια που η πρόσκτηση της από τους μαθητές έχει γίνει αρκετά νωρίς [Ραβάνης, 1993], δεν είναι συμβατή ούτε με τον επιστημονικό ορισμό της φυσικής αυτής έννοιας (που ορίζεται ως διανυσματικό μέγεθος), αλλά ούτε και με την εμπειρία των μαθητών.
- Η αντιμετώπιση του **θέματος III** από τα υποκείμενα Υ12 και Υ15 με μια διαδικασία κάλυψης της επιφάνειας με διαδοχικές καθέτους στον άξονα των χρόνων που το ύψος τους είναι ίσο με την τιμή της ταχύτητας, μέθοδος που παραπέμπει στην διαδικασία του Oresme, μπορεί να αποτελέσει μια συμπληρωματική διδακτική προσέγγιση του θέματος. Την γραπτή απάντηση του Υ12 καταγράφουμε παρακάτω:

s = υt => s = 4X0 = 0m/s
s = 4X1 = 4m/s
s = 4X2 = 8m/s
s = 4X3 = 12m/s
s = 4X4 = 16m
s = 4X5 = 20m/s
s = 4X6 = 24m/s

Στο σχήμα 1 έχουμε την γραφική απεικόνιση των ανωτέρω που έδωσε ο μαθητής



Σχήμα 1

- Το υψηλό ποσοστό επιτυχιών στην Γεωμετρική αντιμετώπιση του **θέματος III** (77%), καθώς οι αντίστοιχες επιτυχίες στον γεωμετρικό προσδιορισμό του διαστήματος στα δυσκολότερα θέματα VII (45%) και VIII (50%), είναι ενδείξεις γενίκευσης του γνωστικού σχήματος που οικοδομείται στην διάρκεια της "διδασκαλίας" - συνέντευξης. Οι δυσκολίες βέβαια στην πορεία της γενίκευσης είναι εμφανείς αφού αρκετοί μαθητές (6, δηλαδή το 27%) σημειώνουν ως διάστημα στην περίπτωση VII, την επιφάνεια ορθογωνίου παραλληλογράμμου, επηρεασμένοι ίσως από τις προηγούμενες απαντήσεις.

- Στο **θέμα VII**, στον προσδιορισμό του διαστήματος s, διαπιστώνουμε ότι αρκετοί μαθητές δεν είναι σε θέση να υπολογίσουν την επιφάνειου του σχηματιζόμενου ορθογωνίου τριγώνου, γεγονός που επισημάναμε και σε άλλες εργασίες μας [Ζαχάρος, 1996].
- Τα υψηλά ποσοστά επιτυχιών στην αντιμετώπιση των **προβλημάτων II και III** με την χρήση των τύπων της Φυσικής σε αντίθεση με την γραφική αντιμετώπιση των ίδιων θεμάτων, τονίζει και εδώ την δυσκολία οικειοποίησης από τους μαθητές του "εργαλείου" αυτού.
- Είναι αξιοσημείωτο ότι στα θέματα που τα χαρακτηρήσαμε ***ισομορφικά***, δηλαδή στα ζεύγη IV ⇔ V και VI ⇔ VII, παρατηρείται μια σαφής υπεροχή στην αντιμετώπιση των θεμάτων της Φυσικής. Αναλυτικότερα, ενώ το ποσοστό επιτυχιών στο **θέμα των Μαθηματικών IV** είναι 32%, στο αντίστοιχό του, όσον αφορά το μαθηματικό περιεχόμενο, **θέμα της Φυσικής V**, είναι 73%. Οι μαθητές που αποτυγχάνουν στο **IV**, απεικονίζουν γραφικά την ευθεία y = 6, ως το σημείο 6 του άξονα yy' (το 73% όσων αποτυγχάνουν). Για παράδειγμα, καταγράφουμε κάποιες αντιπροσωπευτικές απαντήσεις των μαθητών.

> Ε: Ποιά είναι η γραφική παράσταση της y = 6;
> Υ19: Αφού δεν έχουμε x είναι αυτό εδώ (σημειώνει το 6 στον άξονα yy').
> Ε: Στην περίπτωση της σταθερής ταχύτητας υ = 5m/s, ποιά είναι η γραφική της παράσταση;
> Υ19: Αφού είναι σταθερή η ταχύτητα είναι η ευθεία αυτή (κατασκευάζει τη ευθεία).

Το φυσικό νόημα της εξίσωσης υ = 5m/s, καθώς και η λεκτική διατύπωση διευκολύνουν στον σωστό σχεδιασμό της, σε αντίθεση με το αφηρημένο περιεχόμενο της y = 6.

> Ε: Στο μάθημα της Άλγεβρας πως κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση της y = 6;
> Υ7: Είναι το σημείο αυτό (σημειώνει το σημείο 6 στο άξονα yy').
> Ε: Αν τώρα θέλουμε να κάνουμε την γραφική παράσταση της σταθερής ταχύτητας υ = 5m/s;
> Υ7: Θα είναι η ευθεία αυτή (φτιάχνει σωστά την γραφική παράσταση).
> Ε: Ας επιστρέψουμε τώρα στην προηγούμενη, την y = 6, ποιά θα είναι η γραφική της παράσταση;
> Υ7: Θα είναι αυτή (την κατασκευάζει).

Τα 8 από τα 16 υποκείμενα που απαντούν σωστά στο **V**, ενώ απέτυχαν στο **θέμα IV**, όταν επιστρέφουμε στο **IV**, διορθώνουν τις λαθεμένες απαντήσεις τους. Είναι χαρακτηριστικό πως, η αντιμετώπιση του Μαθηματικού θέματος y = 6 μέσα από το αντίστοιχο θέμα της Φυσικής που προσδίδει στην εξίσωση αυτή ένα φυσικό περιεχόμενο, είναι διδακτικά αποτελεσματικότερη.
Όμοια, στο **θέμα VI** έχουμε ποσοστό επιτυχίας 41%, ενώ στο ισομορφικό θέμα από την φυσική **VII**, εχουμε 73%. Εδώ το Μαθηματικό και το Φυσικό θέμα, φαίνεται να

λειτουργούν συμπληρωματικά στην διαδικασία της μάθησης, όπως προκύπτει και στους διαλόγους που καταγράφουμε:

> Ε: Στο μάθημα της Άλγεβρας, πως κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση της y = αχ; Θα ήθελα την γενική της μορφή.
> Υ2: Είναι η ευθεία αυτή (κατασκευάζει σωστά την ευθεία).
> Ε: Στην περίπτωση της ομαλά μεταβαλόμενης ταχύτητας, με σταθερή επιτάχυνση γ, ποιά είναι η γραφική παράσταση της υ = γt;
> Υ2: Είναι ευθεία (κατασκευάζει την γραφική παράσταση). Δεν θα διαφέρει από την προηγούμενη.

Το υποκείμενο Υ3 αντιμετωπίζει τα ίδια θέματα ως εξής:

> Ε: Πως κατασκευάζουμε την γραφική παράσταση της y = αx στο μάθημα της Άλγεβρας;
> Υ3: Δεν το ξέρω, δεν θυμάμαι.
> Ε: Η γραφική παράσταση της ταχύτητας υ = γt, όπου γ είναι σταθερή επιτάχυνση;
> Υ3: Θα είναι η ευθεία αυτή (κατασκευάζει την ευθεία).
> Ε; Ας προσπαθήσουμε ξανά να σχεδιάσουμε την y = αx.
> Υ3: ....(σχεδιάζει την ευθεία).
> Ε: Γιατί είναι έτσι;
> Υ3: Γιατί έχει την ίδια μορφή με την προηγούμενη.

Όμοια και το υποκείμενο Υ6 ενώ δεν γνωρίζει την γραφική παράσταση της y = αx, ανταποκρίνεται επιτυχώς στην υ = γt. Όταν επιστρέφουμε στην Μαθηματική συνάρτηση:

> Υ6: Α!!!, θα είναι αυτή (σχεδιάζει), όπως και η προηγούμενη.

Συζήτηση

Στην έρευνα μας επιχειρήσαμε να αναδείξουμε εκπαιδευτικές δραστηριότητες που συσχετίζουν θέματα των Μαθηματικών και των Φυσικών επιστημών που θα μπορούσαν να αποτελέσουν ένα ενδιαφέρον μέρος του αναλυτικού προγγράμματος της Β/μιας Εκπαίδευσης. Τα προβλήματα με το διάστημα είναι ιδιαίτερα πλούσια στην δυνατότητα παρουσίασης δεδομένων της Φυσικής, με Αλγεβρικό και Γεωμετρικό τρόπο.

Το πρώτο ερώτημα, το οποίο επιχειρήσαμε να διερευνήσουμε, είναι ο βαθμός κατανόησης και χρήσης βασικών, για το επίπεδο της Α' Λυκείου, μαθηματικών γνώσεων για την αντιμετώπιση προβλημάτων του διαστήματος.

Διαπιστώσαμε, την δυσκολία των μαθητών να ερμηνεύσουν, στηριζόμενοι στις γνώσεις τους από το μάθημα της Γεωμετρίας, την Γεωμετρική σημασία του γινομένου αβ, παρόλο που στην πλειοψηφία τους, γνωρίζουν τον τύπο προσδιορισμού εμβαδού ορθογωνίου. Επιπλέον αδυνατούν να δόσουν την γραφική του απεικόνιση σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Η τροποποίηση των όρων του προβλήματος και της διατύπωσης του, αναδεικνύει την έλλειψη μιας λειτουργικής κατανόησης και χρήσης των γνώσεων αυτών. Η δυσκολία των μαθητών να αναπαραστήσουν γραφικά το γινόμενο δύο ευθυγράμμων τμημάτων ως εμβαδό, έχει ως συνέπεια να δυσχεραίνει τις προσπάθειες μας να οικοδομήσουμε ένα γενικό μοντέλο, κατά το οποίο, το γινόμενο δύο μεταβλητών θα απεικονίζεται ως εμβαδό.

Η δεύτερη στόχευση της έρευνας μας που είναι η κοινή διαπραγμάτευση εννοιών που έχουν μια στενή συνάφεια και εντάσσονται στο ίδιο εννοιολογικό πεδίο (conceptual field), εμφανίζεται διδακτικά δημιουργική. Βέβαια, είναι προς διερεύνηση η δυνατότητα γενίκευσης και λειτουργίας του ανωτέρω διδακτικού μοντέλου και σε άλλες φυσικές έννοιες που απαιτούν ανάλογη αντιμετώπιση.
Τρίτον και συμπληρωματικά προς τα ανωτέρω: η διδακτική προσέγγιση που ενσωματώνει ιστορικά χαρακτηριστικά στην αντιμετώπιση της έννοιας του διαστήματος, μπορεί να αποτελέσει ένα εναλλακτικό τρόπο διδασκαλίας. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί και μια ουσιαστική εισαγωγή και σύνδεση με τις έννοιες του ολοκληρωτικού και διαφορικού λογισμού που θα διδαχθούν σε επόμενες τάξεις.
Ο σχεδιασμός μαθημάτων που θα διαπνέονται από τις λογικές και τα μοντέλα που περιγράψαμε προϋγούμενα και η αξιολόγηση τους στις συνθήκες τις σχολικής τάξης, θα συμβάλλει στην αξιοπιστία των συμπερασμάτων μας.
Τέταρτον, η δυσκολία των μαθητών να δώσουν Γεωμετρικές λύσεις στα προβλήματα προσδιορισμού του διαστήματος, αναδεικνύει την αναγκαιότητα για την ανάληψη μιας ιδιαίτερης διδακτικής προσπάθειας παρουσίασης και διδασκαλίας του πολιτισμικού αυτού "εργαλείου".
Τέλος, η εξέταση στις συνεντεύξεις θεμάτων από τα Μαθηματικά και την Φυσική, που είναι ισοδύναμα όσον αφορά το μαθηματικό τους περιεχόμενο, ενισχύουν την κεντρική άποψη που διαπνέει την έρευνα μας για την παιδαγωγική αξία της ανάμειξης των δύο αυτών γνωστικών αντικειμένων, όπου αυτό είναι δυνατό. Ο σχεδιασμός των μαθημάτων όταν βασίζεται σε αυτή την αντίληψη, θα επιτρέπει στους μαθητές να ερευνούν και να συζητούν την φυσική σχέση που υπάρχει μεταξύ των δύο αυτών περιοχών της γνώσης.

Βιβλιογραφία

BATTISTA, M. & CLEMENTS, D. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, v. 88, n.1, p.p. 48-54.
BOYER, C. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* Dover Publications, New York.
ΒΥΓΚΟΤΣΚΙ, Λ. (1988). *Σκέψη και γλώσσα*. Εκδόσεις Γνώση, Αθήνα.
CRITES W., T. (1995). Connecting Geometry and Algedra: Geometric Interpretations of Distance. *The Mathematics Teacher*, v. 88, n.4, p.p. 292-297.
ΖΑΧΑΡΟΣ, Κ. (1996). Η συμβολή της πολιτισμικής - ιστορικής παραμέτρου στον χειρισμό Γεωμετρικών προβλημάτων. Μια εμπειρική έρευνα για τον τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων μέτρησης επιφανειών από μαθητές της Α' Λυκείου, *Παιδαγωγική Επιθεώρηση,* 24, σ. 169-199.
HOFMAN, KARL - WOLF (1987). The transfer of Mathematical skills to Physical tasks. Co - operation between science teachers and Mathematics teachers*, Institut fur Didaktik der Mathematik der Universitat Bielefeld*, p.p. 444-460.
HOFFER, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 1(74), pp. 11-14.

KLINE MORRIS, (1990). *Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης. Η αποτυχία των μοντέρνων μαθηματικών.* Εκδόσεις Βάνια, Θεσσαλονίκη.
ΡΑΒΑΝΗΣ Κ. (1993). *Διδακτική φυσικών εννοιών για την προσχολική ηλικία.* Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών Πανεπιστημίου Πατρών, Πάτρα.
PEDERSEN OLAF and PIHL MOGENS (1974). *Early Physics and Astronomy.* Macdonald and Janes, London.
SALJO, R. (1994). Μάθηση και μεσολάβηση. Η προσαρμογή της πραγματικότητας σε έναν πίνακα. Στο Γ. ΠΑπαμιχαήλ (επιμ.) *Κοινωνιο-Γνωστική προσέγγιση και διδακτικές διαδικασίες της μάθησης των Φυσικών και Λογικο-μαθηματικών εννοιών στο Σχολείο*, εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, σελ. 127-148.
SCHWARTZ, J., L. (1989). *Intensive Quantity and Referent Transforming Arithmetic Operatios***.** In J. Hiebert, & M. Behr (eds.) *Number Concetps and Operations in the Middle Grades*, National Council of Teachers Mathematics, pp. 41 - 52.
SIMON, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2(26).
VERGNAUD, G. (1979). *Didactics and acquisition of "multiplicative structures" in secondary schools.* In W. Archenhold, et. al.(eds.) *Cognitive Development Research in Science and Mathematics*, p.190- 201.
VERGNAUD, G. (1983). *Multiplicative Structures.* In R. Lesh & M. Landau (eds.) *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, Academic Press, pp. 127-174.
ΧΑΣΑΠΗΣ Δ. (1991). *Η συγκρότηση και η ανάπτυξη επιλεγμένων λογικο-μαθηματικών ικανοτήτων χειρισμού μαθηματικών προβλημάτων. Συμβολή στην αξιολόγηση της μαθηματικής εκπαίδευσης στο Δημοτικό σχολείο και το Γυμνάσιο.* Διδακτορική Διατριβή, Παιδαγωγικό Τμήμα Δ.Ε. Πανεπιστημίου Πατρών.