Ο ρόλος των γραφικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων[1]

Κώστας Ζαχάρος

Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία,

Πανεπιστήμιο Πατρών

Περίληψη. Η έρευνα στο χώρο της μαθηματικής παιδείας δείχνει ότι η ικανότητα των μαθητών και μαθητριών να αντιμετωπίσουν προβλήματα που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις, προσκρούει σε δυσκολίες που σχετίζονται τόσο με την μετακίνηση μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών και συμβολικών κωδίκων, όσο και με το εκάστοτε πλαίσιο συμφραζομένων όπου η «ανάγνωση» των συμβόλων και των κωδίκων αποκτούν νόημα. Καταστάσεις που περιγράφονται με το συντακτικό της καθημερινής γλώσσας οφείλουν να μετασχηματιστούν στη σύνταξη του μαθηματικού λόγου.

Η ποιοτική μελέτη ερμηνειών ενός λεκτικού προβλήματος που παρουσιάζεται στην παρούσα έρευνα επικεντρώνεται στις ειδικές δυσκολίες που προκύπτουν από την σημασιολογική ασυμφωνία μεταξύ της γραπτής ή προφορικής διατύπωσης ενός προβλήματος που περιγράφει μια καθημερινή κατάσταση και του τρόπου αναπαράστασης του προβλήματος αυτού στο πλαίσιο της μαθηματικής του ανάγνωσης.

Θεωρητικές επισημάνσεις

Η χρήση διαφορετικών γλωσσικών και συμβολικών κωδίκων

Η ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης και της διδασκαλίας των μαθηματικών είναι συνυφασμένη με τη χρήση μιας μεγάλης ποικιλίας σημασιολογικών στοιχείων, όπως η φυσική γλώσσα και ο ειδικός μαθηματικός συμβολισμός με τα σχήματα, την απεικόνιση στο καρτεσιανό σύστημα αξόνων, τα διαγράμματα, κλπ. Η «ανάγνωση» των σημασιολογικών στοιχείων καθώς και η ανάπτυξη της ερμηνευτικής ικανότητας,

---

[1] Ζαχάρος, Κ. 2006, 'Ο ρόλος των γραφικών αναπαραστάσεων στην επίλυση προβλημάτων'. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, τόμος 7, αρ. 1, σελ. 53-66.

δεν είναι αυτονόητα επακόλουθα της γνωστικής ανάπτυξης των παιδιών, αλλά αποτελέσματα εμπρόθετης, μεθοδικής και επίμονης διδασκαλίας που, στα πλαίσια ενός, συνήθως, άρρητου «διδακτικού συμβολαίου», οι μαθητές και μαθήτριες οφείλουν να τα οικειοποιηθούν.

Η ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων είναι συνυφασμένη με τις διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων, που αποτελεί σήμερα ένα σημαντικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης. Η επίλυση προβλημάτων θεωρείται ένας προνομιακός χώρος της μαθηματικής εκπαιδευτικής πρακτικής, όπου δίνεται η δυνατότητα να αναδυθούν οι μαθηματικές δεξιότητες και γνώσεις των μαθητών και μαθητριών σε καταστάσεις-προβλήματα που περιγράφουν μορφές αυθεντικών ή πιθανών καταστάσεων (π.χ. Veel 1999, Wyndhamn και Säljö 1997), έξω από το σύνηθες τυπικό πλαίσιο που μας προσφέρουν οι αφηρημένες εφαρμογές και αλγοριθμικές διαδικασίες.

Το εγχείρημα της ανάπτυξης των ικανοτήτων των μαθητών και μαθητριών στη αντιμετώπιση προβλημάτων που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις προσκρούει σε δυσκολίες που σχετίζονται τόσο με τη μεταφορά μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών και συμβολικών κωδίκων, όσο και με το εκάστοτε πλαίσιο συμφραζομένων όπου η «ανάγνωση» των συμβόλων και των κωδίκων αποκτά νόημα. Καταστάσεις που περιγράφονται με το συντακτικό της καθημερινής γλώσσας οφείλουν να μετασχηματιστούν στη σύνταξη του μαθηματικού λόγου.

Διαδικασίες «αποπλαισίωσης» και «αναπλαισίωσης» ενός προβλήματος

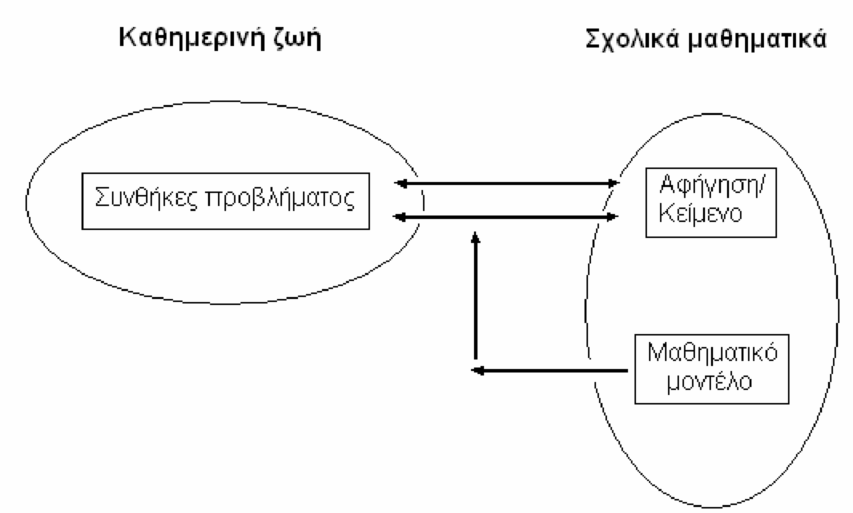
Η ερευνητική εμπειρία δείχνει ότι οι μαθητές εξοικειωμένοι με τις συνήθεις πρακτικές του σχολείου δεν είναι σε θέση να ανταποκριθούν σε λεκτικά προβλήματα γιατί απουσιάζει από την οπτική τους μια «ρεαλιστική θεώρηση» του προβλήματος (Wyndhamn και Säljö 1997). Τα λεκτικά προβλήματα, κύρια αυτά που περιγράφουν πραγματικές καταστάσεις, στο πλαίσιο της τυπολογίας των σχολικών μαθηματικών πρακτικών απογυμνώνονται από τις συνθήκες και τους περιορισμούς ύπαρξής τους, με συχνό επακόλουθο οι προτεινόμενες μαθηματικές λύσεις να είναι περιοριστικές και ενίοτε παραμορφωτικές των πραγματικών συνθηκών. Στις διαδικασίες μοντελοποίησης οι μαθητές και μαθήτριες απομακρύνονται από το νόημα των καταστάσεων που περιγράφουν τα προβλήματα. Στο πλαίσιο μιας κοινωνιολογικής θεώρησης (Dowling

1998, 2001) η πορεία μοντελοποίησης ενός λεκτικού προβλήματος μπορεί σχηματικά να περιγραφεί από την επόμενη πορεία:

- Απόσπαση του προβλήματος που περιγράφει λεκτικά ένα σύνολο καθημερινών γεγονότων και καταστάσεων από το συγκεκριμένο του πλαίσιο. Πρόκειται ουσιαστικά για μια διαδικασία «αποπλαισίωσης» (decontextualised) του προβλήματος κατά την οποία αυτό παύει να αποτελεί ένα κείμενο της φυσικής γλώσσας.
- Προσπάθεια ένταξης του προβλήματος σε ένα νέο, διαφορετικό πλαίσιο συμφραζομένων, όπου το κείμενο «διαβάζεται» ως μαθηματικό πρόβλημα. Στη διαδικασία αυτή της «αναπλαισίωσης» (recontextualised) το αρχικό κείμενο τροποποιείται σε ένα λεκτικό πρόβλημα στα πλαίσια όμως της διδασκαλίας των μαθηματικών.

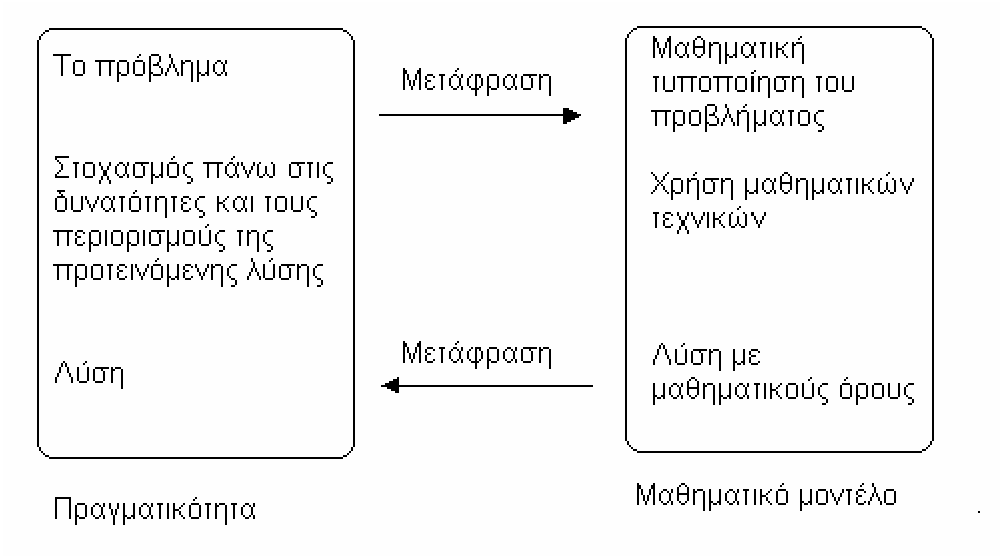
Η διαδικασία αυτή της «αναπλαισίωσης» (recontextualization) έχει ως συνέπεια μια απομάκρυνση από τις αρχικές συνθήκες που περιγράφουν το πρόβλημα και την υποκατάσταση από νέες που δημιουργούν οι σχολικές πρακτικές. Εντός της σχολικής αίθουσας το πρόβλημα τοποθετείται σε ένα επικοινωνιακό πλαίσιο που διαφέρει από την άποψη της λογικής που το συνέχει. Οι μαθητές και μαθήτριες αντιλαμβάνονται ότι η ερμηνεία του οφείλει οπωσδήποτε να ακολουθήσει τη λογική των σχολικών μαθηματικών. Έτσι, τα λεκτικά προβλήματα αντιμετωπίζονται σαν μαθηματικές ασκήσεις που θα πρέπει να επιλυθούν σύμφωνα με την τυπολογία των σχολικών μαθηματικών. Είναι ενδεικτικό ότι, η αντιμετώπιση ενός ιδιαίτερου προβλήματος αλλάζει άρδην από το αν το πρόβλημα αυτό τοποθετείται στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών ή της διδασκαλίας των κοινωνικών επιστημών.

Οι παραπάνω επισημάνσεις υπογραμμίζουν την ανάγκη η διδασκαλία των μαθηματικών να συμπληρωθεί με μια νέα διάσταση όπου θα λαμβάνονται υπ’ όψη οι «πραγματικές συνθήκες» στις οποίες αναφέρεται το πρόβλημα. Η άποψη αυτή αποτυπώνεται διαγραμματικά στο σχήμα 1 (Wyndhamn και Säljö 1997: 367) και ειδικότερα στο μέρος εκείνο του διαγράμματος που αναφέρεται στη διαδικασία επιστροφής από το μαθηματικό μοντέλο, στις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος.



Σχήμα 1. Η διαδικασία μοντελοποίησης ενός προβλήματος

Ανάλογες είναι και οι επισημάνσεις της ερευνητικής και διδακτικής προσέγγισης που τιτλοφορείται ως «ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση» (realistic mathematics education) (Brink Van den 2000, Wubbels et. al. 1997) και εντάσσεται στην φαινομενολογική προοπτική του H. Freudentahal (1983). Εδώ υπογραμμίζεται η ανάγκη τα προβλήματα να παρουσιάζονται σε ένα πλαίσιο αναγνωρίσιμων συμφραζομένων και να συνδέονται με τις πιθανές εμπειρίες του μαθητή και τα προσωπικά του ενδιαφέροντα. Η πορεία της μοντελοποίησης στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση περιγράφεται (σχήμα 2, Woubbels et al. 1997: 7) από την ακόλουθη πορεία: Μετάφραση του διατυπωμένου σε φυσική γλώσσα προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα (οριζόντια διάσταση της μοντελοποίησης), ανάλυση και δόμησή του ως μαθηματικού προβλήματος (κατακόρυφη διάσταση της μοντελοποίησης) και τέλος, αναζήτηση της μαθηματικής λύσης (κατακόρυφη διάσταση). Σε ένα επόμενο στάδιο ακολουθείται μια αντίστροφη πορεία, σύμφωνα με την οποία, η λύση ερμηνεύεται με βάση τα δεδομένα της αρχικά περιγραφόμενης κατάστασης με τους περιορισμούς και τις δυνατές προεκτάσεις. Ο κύκλος της μοντελοποίησης ολοκληρώνεται με έναν απαραίτητο κύκλο επιστροφής όπου η ερμηνεία του προβλήματος υπόκειται σε επεξεργασία, γενίκευση ή τροποποίηση.



Σχήμα 2. Η πορεία επίλυσης στη «ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση»

Η οικειοποίηση των πολιτισμικών «εργαλείων»

Η πρόσφατη ερευνητική ενασχόληση με την επίλυση προβλημάτων δεν προσεγγίζει το αντικείμενό της μόνο από την ψυχολογική οπτική της γνωστικής ανάπτυξης, αλλά δίνει ιδιαίτερη έμφαση στο ρόλο που διαδραματίζουν κοινωνικές παράμετροι στη νοητική ανάπτυξη του ανθρώπου (Säljö 1994, Wyndhamn & Säljö 1997). Η κοινωνικο-πολιτισμική αυτή θεώρηση, που έχει ως αναφορά το έργο του ψυχολόγου L. Vygotsky, θεωρεί σημαντικό το ρόλο της κοινωνικής διαμεσολάβησης στην οικοδόμηση της γνώσης και ειδικότερα την επιδίωξη οικειοποίησης των πολιτισμικών «εργαλείων» που διαθέτει κάθε πολιτισμός. Η διαδικασία οικειοποίησης των πολιτισμικών εργαλείων είναι μια ενσυνείδητη και εμπρόθετη προσπάθεια που συντελείται στα πλαίσια της κοινωνίας. Για παράδειγμα, ο τρόπος γραφής σε πίνακες, οι γραφικές παραστάσεις σε σύστημα αξόνων, κλπ., είναι πολιτισμικά εργαλεία, που η «ανάγνωσή» τους βασίζεται σε μια εξειδικευμένη ερμηνευτική ικανότητα που δεν είναι ούτε έμφυτη, ούτε καθολική. Εξαρτάται από μια προσπάθεια εμπρόθετης μάθησης και το είδος αυτό «ανάγνωσης» θεωρείται ως διαδικασία οικειοποίησης των πολιτισμικών εργαλείων που διαθέτει κάθε πολιτισμός.

Σχέσεις λεκτικής διατύπωσης και γραφικής αναπαράστασης ενός προβλήματος

Σύμφωνα με την ερμηνευτική προσέγγιση του R. Duval (1987) σημαντικό ρόλο στην επίλυση των προβλημάτων παίζει η πιθανή *σημασιολογική συμφωνία* ή *σημασιολογική ασυμφωνία* μεταξύ της λεκτικής διατύπωσης ενός μαθηματικού προβλήματος, της γραφικής αναπαράστασης και του μαθηματικού συμβολισμού που χρησιμοποιούνται στην περιγραφή του προβλήματος. Στις περιπτώσεις της σημασιολογικής συμφωνίας παρατηρούνται μεγαλύτερες επιτυχίες των μαθητών και μαθητριών, απ' ότι στις περιπτώσεις ασυμφωνίας, όπου απαιτείται πρόσθετη διδακτική προσπάθεια.

Σκοπός της έρευνας που θα παρουσιαστεί εδώ είναι να παρατηρήσουμε τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και μαθήτριες όταν κινούνται μεταξύ αυτών των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης κατά την επίλυση προβλημάτων. Η ποιοτική μελέτη των ερμηνειών ενός λεκτικού προβλήματος που θα παρουσιαστεί εδώ επικεντρώνεται στις ειδικές δυσκολίες που προκύπτουν από την σημασιολογική ασυμφωνία μεταξύ της γραπτής ή προφορικής διατύπωσης ενός προβλήματος που περιγράφει μια καθημερινή κατάσταση και του τρόπου αναπαράστασης του προβλήματος αυτού στο πλαίσιο της μαθηματικής του επεξεργασίας.

Μεθοδολογία

Στην παρούσα εργασία θα παρακολουθήσουμε ένα μαθητή της ΣΤ' Τάξης του Δημοτικού, μια μαθήτρια της Α' Τάξης Γυμνασίου και μια φοιτήτρια του Τμήματος Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία στο Πανεπιστήμιο Πατρών, στην προσπάθειά τους να επιλύσουν ένα λεκτικό πρόβλημα.

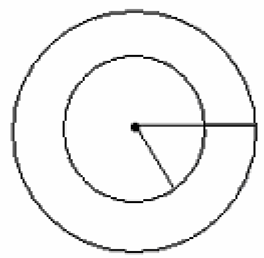
Οι δύο μαθητές του δείγματος είχαν καλές σχολικές επιδόσεις στο μάθημα των μαθηματικών (η βαθμολογία τους ήταν «άριστη») και η φοιτήτρια παρακολούθησε στο Λύκειο τη θετική κατεύθυνση. Η επιλογή διαφορετικών εκπαιδευτικών βαθμίδων μας δίνει τη δυνατότητα να ανιχνεύσουμε πιθανές διαφοροποιήσεις στους τρόπους «αποπλαισίωσης» και «αναπλαισίωσης» του προβλήματός μας από τα συγκεκριμένα υποκείμενα. Οι μαγνητοφωνημένες συνεντεύξεις και οι γραπτές τους σημειώσεις, μέρος των οποίων παρουσιάζονται εδώ, αποτελούν το υλικό για την αξιολόγηση του ερευνητικού μας εγχειρήματος.

Το πρόβλημα

Ζητήθηκε από τους μαθητές και τις μαθήτριες που συμμετείχαν στην έρευνά μας να λύσουν το επόμενο πρόβλημα[2]:

Το σπίτι του Νίκου απέχει από το σχολείο 700 μέτρα, ενώ το σπίτι της Μαρίας 1500 μέτρα. Πόσο απέχει το σπίτι του Νίκου από το σπίτι της Μαρίας;

Με βάση τη διάκριση που προτείνει ο R. Duval (1987) μεταξύ της λεκτικής διατύπωσης, της γραφικής αναπαράστασης και της αναπαράστασης μέσω του αλγεβρικού συμβολισμού προβαίνουμε στην επόμενη σχηματοποίηση του επόμενου πίνακα:

Λεκτική Διατύπωση	Γραφική Παράσταση	Αλγεβρικός συμβολισμός
Το σπίτι του Νίκου απέχει από το σχολείο 700μ., ενώ το σπίτι της Μαρίας 1500μ. Πόσο απέχει το σπίτι του Νίκου από το σπίτι της Μαρίας;		$800m \leq x \leq 2200m$

Πίνακας. Μορφές αναπαράστασης του προβλήματος

Από την άποψη του μαθηματικού περιεχομένου οι τρεις καταστάσεις (λεκτική διατύπωση-γραφική παράσταση-αλγεβρικός συμβολισμός) είναι σημασιολογικά ισοδύναμες, αφού αναφέρονται στο ίδιο πρόβλημα. Όμως μεταξύ της λεκτικής διατύπωσης και της γραφικής αναπαράστασης διαπιστώνονται στοιχεία σημασιολογικής ασυμφωνίας: Ενώ, δηλαδή, η λεκτική διατύπωση «*πόσο απέχει το σπίτι του Νίκου από σπίτι της Μαρίας;*» παραπέμπει στην έννοια της απόστασης/του μήκους που συνήθως υπολογίζεται μέσω της ευθύγραμμης σύνδεσης των δύο σημείων (του σπιτιού του Νίκου και της Μαρίας), η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος αποτυπώνεται με δύο ομόκεντρους κύκλους. Από την άλλη, ο αλγεβρικός συμβολισμός προσδιορίζει τα όρια ενός διαστήματος και βρίσκεται μάλλον σε σημασιολογική συμφωνία με την λεκτική διατύπωση.

[2] Ανάλογο πρόβλημα απαντάται στους J. Wyndhamn & R. Säljö (1997).

Με βάση τις ερμηνευτικές προσεγγίσεις που προηγήθηκαν θα επιχειρήσουμε στη συνέχεια να παρακολουθήσουμε την διαδικασία επίλυσης του ανωτέρω προβλήματος, χωρίς να δοθεί έμφαση στον αλγεβρικό συμβολισμό.

Τα εμπειρικά δεδομένα και η αξιολόγησή τους

Η συγγραμμικότητα ως συνέπεια της σημασιολογικής ασυμφωνίας

Η σημασιολογική ασυμφωνία μεταξύ της λεκτικής διατύπωσης και της γραφικής παράστασης, που επισημάνθηκε προηγούμενα, έχει ως συνέπεια η γραφική απεικόνιση του λεκτικού προβλήματος να εκφράζεται στην περίπτωση της μαθήτριας και της φοιτήτριας με την συγγραμμικότητα των τριών κτηρίων. Η γραφική αναπαράσταση φαίνεται εδώ να λειτουργεί αρνητικά στη δυνατότητα κατανόησης και περιγραφής των πραγματικών συνθηκών του προβλήματος. Καταγράφουμε στη συνέχεια ενδεικτικά αποσπάσματα των συνεντεύξεων και των σημειώσεών τους, που καταδεικνύουν το πως αντιλαμβάνονται και αναπαριστάνουν γραφικά τις συνθήκες του προβλήματος.

<u>*Μαθήτρια*</u>

Μαθήτρια: Πρώτα δεν θα αφαιρέσουμε;

Ε. (Ερευνητής): Τι θα αφαιρέσουμε;

Μαθήτρια: Το 700 από το 1500, για να βρούμε πόσο περισσότερο απέχει το σπίτι της Μαρίας από του Νίκου.

Ε: Αν κάνουμε την αφαίρεση, πόσο θα βρούμε;

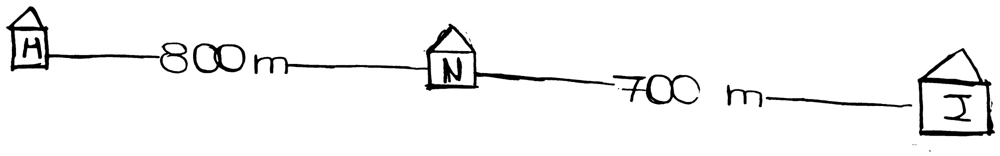
Μαθήτρια: 800 μέτρα.

Ε: Μπορείς να κάνεις ένα σχέδιο; Πως θα μπορούσαν να είναι το σχολείο, το σπίτι του Νίκου και το σπίτι της Μαρίας;

Η μαθήτρια μας δίνει τη συγγραμμική χωροθέτηση των κτηρίων[3] του σχήματος 3.

---

[3] Για λόγους ομοιομορφίας στον συμβολισμό συμφωνούμε το σχολείο να συμβολίζεται με Σ, το σπίτι της Μαρίας με Μ και του Νίκου με Ν. Επίσης για διευκόλυνση στις κατασκευές τα 1500m συμβολίζονται με 15cm, τα 700m με 7cm, κλπ.



Σχήμα 3. Η συγγραμμικότητα των κτηρίων (Σ: Σχολείο, Μ: Σπίτι Μαρίας, Ν: Σπίτι Νίκου)

Φοιτήτρια

Η φοιτήτρια επίσης ισχυρίζεται ότι:

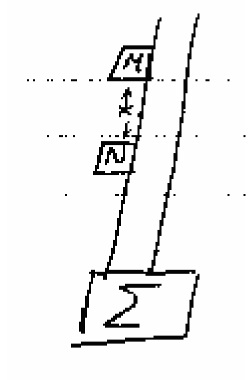
Φ (Φοιτήτρια): Τα δεδομένα της άσκησης δεν επαρκούν.

Ε: Υπάρχει κάποια λύση που θα μπορούσες να σκεφτείς; Ποια θα ήταν;

Φ: Λύση θα ήταν τα δύο σπίτια να είναι πάνω στον ίδιο δρόμο και να κάνουμε αφαίρεση.

Ε: Μπορείς να το σχεδιάσεις αυτό;

Η γραφική αναπαράσταση του προβλήματος από τη φοιτήτρια δίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4. Η αναπαράσταση της φοιτήτριας

Μια διαφορετική προσέγγιση

Σε αντίθεση με την προηγούμενη μορφή γραφικής αναπαράστασης του προβλήματος, ο μαθητής μας προτείνει μια διαφορετική χωροθέτηση των κτηρίων (σχ. 5).

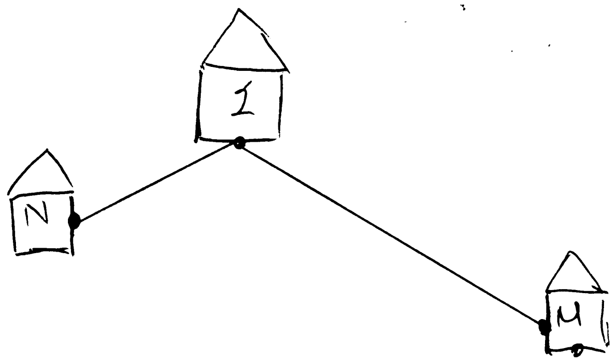
Μ(Μαθητής): Θα κάνουμε αφαίρεση: 1500 πλην 700

Ε: Δηλαδή πόσο θα απέχουν;

Μ: 800 μέτρα.

Ε: Μπορείς να σχεδιάσεις το σχολείο και τα δύο σπίτια, έτσι όπως τα φαντάζεσαι;

Ο μαθητής προτείνει την επόμενη μη-συγγραμμική χωροθέτηση των κτηρίων (σχ. 5) που δεν αντιστοιχίζεται όμως με τη λογική των προτεινόμενων αριθμητικών πράξεων.



Σχήμα 5. Μια διαφορετική διευθέτηση των κτηρίων

Ε: Πόσο λοιπόν απέχει το σπίτι του Νίκου από το σπίτι της Μαρίας;

Μ: 22,… 2200 μέτρα.

Ε: Εσύ μου είπες 800 προηγουμένως. Τελικά ποια είναι η απόσταση, 2200 μέτρα ή 800 μέτρα που βρήκες στην αρχή με την αφαίρεση; Στην αρχή γιατί έκανες αφαίρεση, πως το σκέφτηκες;

Μ: Έτσι μου ήρθε. Σκέφτηκα ότι το σπίτι του Νίκου είναι πιο μπροστά από το σπίτι της Μαρίας και το σπίτι της Μαρίας είναι πίσω από του Νίκου.

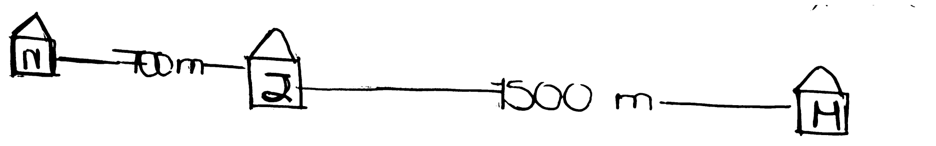
Οι προτεινόμενες από το μαθητή αριθμητικές λύσεις του προβλήματος προϋποθέτουν τη συγγραμμική τοποθέτηση των κτηρίων. Οι πληροφορίες που έχουμε στη διάθεσή μας δεν επαρκούν για την ερμηνεία της παρατηρούμενης «ασυνέπειας» μεταξύ των αριθμητικών λύσεων και της γραφικής αναπαράστασης. Ενδέχεται η επιλογή του σχεδίου να είναι τυχαία και χωρίς αναφορά στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, ενδέχεται όμως, να απεικονίζει την πραγματική νοητική αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος ενώ, αντίθετα, οι αριθμητικές λύσεις να περιγράφουν μερικές και ελλιπείς απόπειρες απάντησης.

Η σημασιολογική ασυμφωνία και η λειτουργία διδακτικών εμποδίων

Στη συνέχεια ζητείται να δοθούν εναλλακτικοί τρόποι τοποθέτησης των κτηρίων. Η μαθήτρια και η φοιτήτρια επιμένουν στη συγγραμμική αναπαράσταση, αλλάζοντας μόνο την τοποθέτηση των κτηρίων.

Μαθήτρια

Η μαθήτρια σχεδιάζει το επόμενο σχήμα (σχ. 6).



Σχήμα 6. Εναλλακτική παρουσίαση των κτηρίων από τη μαθήτρια

Ε: Τώρα πόσο είναι η απόσταση των δύο σπιτιών;

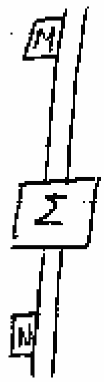
Μ: Θα προσθέσω, το 700 με το 1500. Να το κάνω;

Ε: Ναι.

Μ: (Κάνει την πρόσθεση) 2200 μέτρα.

Φοιτήτρια:

Φ: Άλλη περίπτωση είναι, να είναι μεν στον ίδιο δρόμο αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση (σχ. 7). Στην προκειμένη περίπτωση θα ήταν το άθροισμα 700+1500=2200μ.



Σχήμα 7. Απόσταση = 700+1500

Σύμφωνα με τις θεωρητικές μας επισημάνσεις, η απόσπαση του λεκτικού προβλήματος από τις αρχικές συνθήκες νοηματοδότησής του, οδηγεί εδώ σε μια ορισμένη ερμηνεία της απόστασης και της συνακόλουθης τοποθέτησης των κτηρίων. Σε πραγματικές συνθήκες η απόσταση που ενώνει δύο σπίτια συνήθως δεν είναι ευθεία. Η απόσπαση όμως του προβλήματος από τις αρχικές του συνθήκες και η ένταξή του σε ένα πλαίσιο συμφραζομένων που του προσδίδει μαθηματικό περιεχόμενο (recontextualization) οδηγεί σε μια ορισμένη ανάγνωσή του όπου, σύμφωνα με τις διδακτικές συμβατικότητες, κυριαρχεί ο μαθηματικός λόγος και συνακόλουθα οι ερμηνείες του αρχικού κειμένου επηρεάζονται απ' αυτόν. Σε αυτό το πλαίσιο, η απόσταση των δύο σπιτιών μεταφράζεται ως η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο και αποτυπώνεται στον τρόπο γραφικής αναπαράστασης του προβλήματος από τα υποκείμενα του δείγματος. Το γεγονός αυτό περιορίζει τις αντιληπτικές ικανότητες των συγκεκριμένων υποκειμένων να κατανοήσουν τη συνθετότητα του προβλήματος.

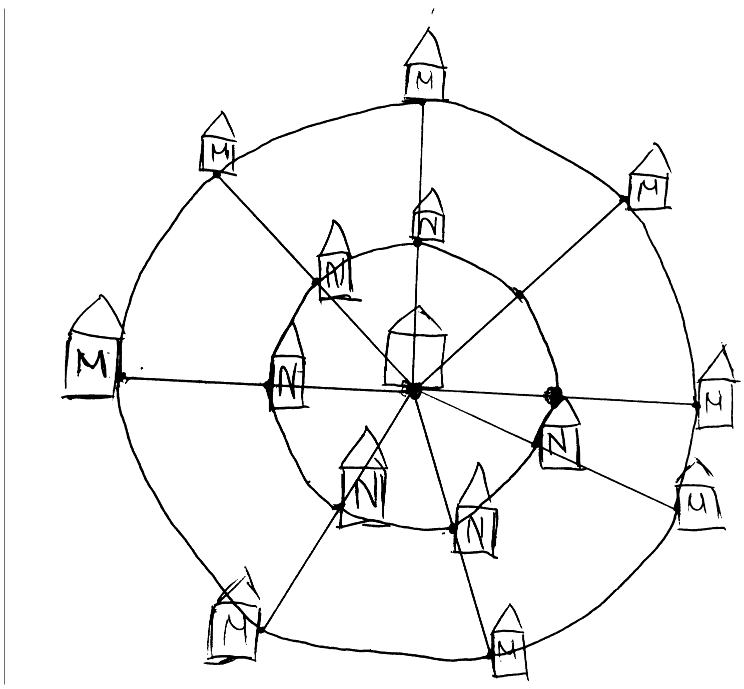
Αποδέσμευση από τη συγγραμμικότητα

Η διαφορετική αναπαράσταση του προβλήματος από το μαθητή διευκολύνει στην αποδέσμευση από τη συγγραμμική προοπτική. Στην προτροπή μας να δώσει και άλλες πιθανές θέσεις των κτηρίων:

Μ.: Να φτιάξω και άλλα (άλλες πιθανές θέσεις του σπιτιού της Μαρίας);

Ε.: Ναι.

Τοποθετεί τα σπίτια σε πολλές διαφορετικές θέσεις, σύμφωνα με τις προϋποθέσεις του προβλήματος και στη συνέχεια προσδιορίζει εύκολα το γεωμετρικό τόπο που ορίζουν οι θέσεις τους (σχ. 8).



Σχήμα 8. Ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων των σπιτιών (Μαθητής)

Η περίπτωση της λανθασμένης προοπτικής

Στην προτροπή μας να βρεθούν και άλλες πιθανές θέσεις για τα δύο σπίτια η μαθήτρια αλλάζει την προοπτική του σχεδίου της και παίρνει σαν σημείο αναφοράς το σπίτι της Μαρίας. Τοποθετεί το σχολείο στις δύο κατακόρυφες και οριζόντιες θέσεις (σχήμα 10).

Ε.: Αλλού θα μπορούσε να βρίσκεται (το σχολείο);

Μ1.: Και εδώ (στις θέσεις των διαγωνίων).

Ε.: Αν βρεις όλες τις θέσεις τι σχήμα θα δημιουργηθεί;

Μ1.: Ένας κύκλος.

Ε.: Με ποιο κέντρο και τι ακτίνα:

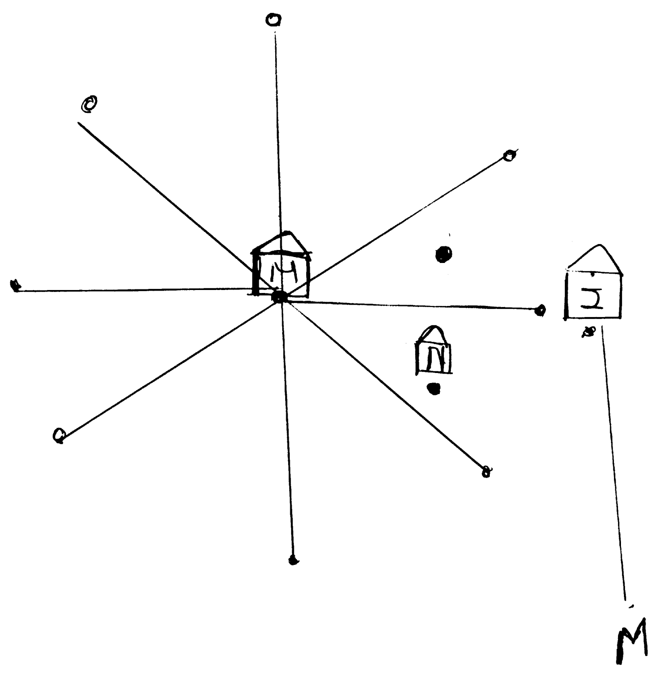
Μ1.: Με κέντρο το σπίτι της Μαρίας και ακτίνα 1500 μέτρα.

Ε.: Το σπίτι του Νίκου που θα βρίσκεται;

Μ1.: Κάπου εδώ (δείχνει στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου).

Ε.: Ας φτιάξουμε ένα σχέδιο με τις θέσεις που μπορεί να βρίσκονται τα κτήρια.

Μ1.: Το σπίτι του Νίκου θα βρίσκεται κάπου εδώ (Σημειώνει δύο θέσεις συμμετρικές ως προς τον οριζόντιο άξονα-σχήμα 9).



Σχήμα 9. Η λανθασμένη προοπτική (Μαθήτρια)

Ε.: Σε άλλες θέσεις θα μπορούσε να βρίσκεται το σπίτι του Νίκου;

M1.: Είναι όλα τα σημεία που απέχουν από το σχολείο 700 μέτρα.

Ε.: Και τι σχήμα δημιουργούν όλες αυτές οι θέσεις;

Μ1.: Κύκλο.

Οικοδομώντας τη λύση του προβλήματος

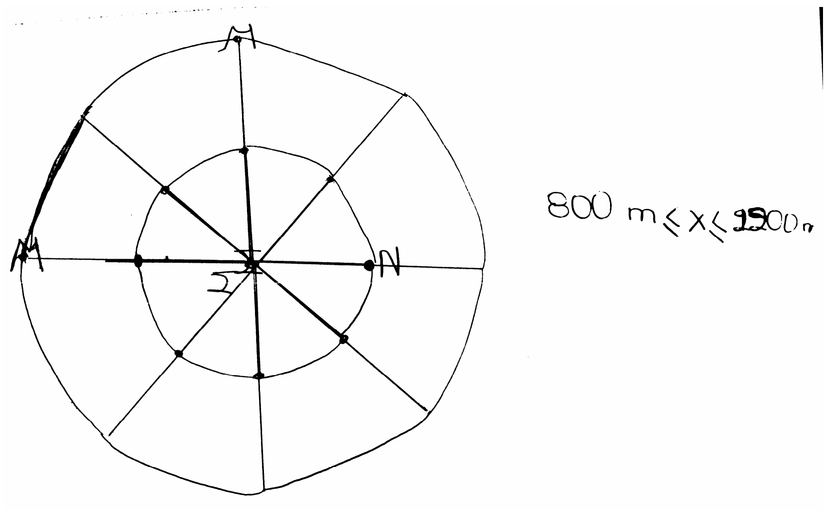
<u>*Μαθήτρια*</u>

Στη συνέχεια η μαθήτρια καλείται να επιστρέψει στο κείμενο ώστε να αξιολογήσει τη μέχρι εδώ πορεία της εργασίας της. Η διαδικασία αυτή της δίνει τη δυνατότητα να αναστοχαστεί και να τροποποιήσει την προηγούμενη επιλογή της.

Μ1.: Έπρεπε να βάλουμε το σχολείο εδώ (στη θέση του σπιτιού της Μαρίας- Αλλαγή προοπτικής).

Ε.: Ωραία. Ας φτιάξουμε τώρα ένα νέο σχήμα.

Μ1.: (Φτιάχνει την κατασκευή του σχήματος 10 με ομόκεντρους κύκλους).



Σχήμα 10. Οικοδομώντας τη λύση του προβλήματος (Μαθήτρια)

Ε.: Το πρόβλημά μας έχει λύση, έχει πολλές λύσεις ή δεν έχει καμία λύση;

Μ1.: Υπάρχουν πολλές λύσεις.

Ε.: Η πιο μικρή απόσταση μεταξύ των δύο σπιτιών πόσο είναι;

Μ1.: 800 μέτρα.

Ε.: Και η πιο μεγάλη;

Μ1.: 2200 μέτρα.

Ε.: Θα μπορούσε η απόσταση των δύο σπιτιών να είναι 1000 μέτρα;

M1.: Ναι.

Ε.: 2400 μέτρα;

M1.: Όχι.

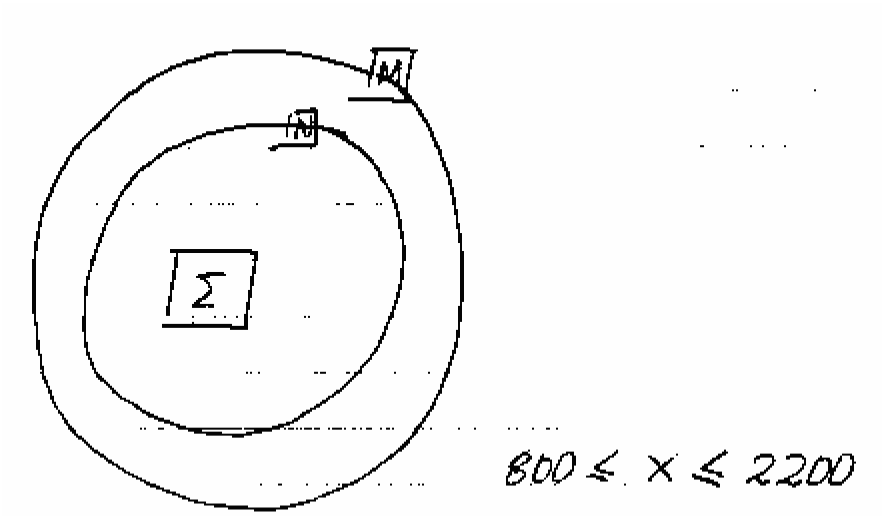
Ε.: Αν θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε μαθηματικά σύμβολα και ορίσουμε x την απόσταση, πως θα σημειώναμε την απόσταση των δύο σπιτιών;

M1.: $800 \leq x \leq 2200$.

Φοιτήτρια

Ε: Άλλη λύση μπορείς να σκεφτείς;

Κ: Άλλη λύση σαφώς πάνω στον κύκλο, κύκλο νοητό που να είναι το σπίτι της Μαρίας ή του Νίκου. Θεωρώ πως οι λύσεις είναι άπειρες, πραγματικά άπειρες (σχ. 11).



Σχήμα 11. Οικοδομώντας τη λύση του προβλήματος (Φοιτήτρια)

Συζήτηση

Στην παρούσα εργασία προσπαθήσαμε να αναδείξουμε θεωρητικές πτυχές της διαδικασίας μοντελοποίησης ενός λεκτικού προβλήματος. Υπογραμμίσαμε ότι το γεγονός της απόσπασης ενός «πραγματικού» λεκτικού προβλήματος από το συγκεκριμένο πλαίσιο αναφοράς του και η ένταξή του σε ένα νέο πλαίσιο που νοηματοδοτείται από τις μαθηματικές πρακτικές του σχολείου, έχει ως συνέπεια ένα διαφορετικό τρόπο ανάγνωσής του από τους μαθητές και τις μαθήτριες.

Παράλληλα, επιχειρήσαμε μια ερμηνευτική προσέγγιση του προβλήματος μέσα από τη διάκριση της λεκτικής διατύπωσης, και της γραφικής του παράστασης εντοπίζοντας στοιχεία σημασιολογικής συμφωνίας ή ασυμφωνίας μεταξύ των παραμέτρων αυτών. Στις περιπτώσεις της σημασιολογικής ασυμφωνίας υπογραμμίσαμε τις πρόσθετες δυσκολίες στην αντιμετώπιση των προβλημάτων, όπως στην περίπτωση των δύο υποκειμένων του παραδείγματός μας που, παρά τις διαφορετικές εκπαιδευτικές τους εμπειρίες, αντιμετωπίζουν με παρόμοιο τρόπο το πρόβλημα. Επιπλέον, το συγκεκριμένο πρόβλημα που πραγματευτήκαμε μας δίνει αφορμή για να αναδείξουμε τη σημασία της δημιουργίας ενός πειραματικού περιβάλλοντος που εμπλέκεται η *«οπτική διδασκαλία»* (Hershkowitz et al. 1996) και όπου τα σχήματα και ο χώρος αντιμετωπίζονται σαν θεμελιακά στοιχεία για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης. Οφείλουμε εδώ να υπογραμμίσουμε τον ρόλο των γραφικών παραστάσεων ως «εργαλείων» που διαμεσολαβούν μεταξύ του υποκειμένου και του αντικειμένου της μάθησης. Τα «εργαλεία» μάθησης που χρησιμοποιούνται από τη θεσμοθετημένη εκπαίδευση δεν είναι αυτονόητα προϊόντα της γνωστικής ανάπτυξης, ούτε μονοσήμαντα παράγωγα του τρόπου σκέψης, αλλά αποτελέσματα μιας εμπρόθετης κοινωνικής μεταβίβασης, που στη συγκεκριμένη περίπτωση συντελείται μέσω των εκπαιδευτικών θεσμών (Nunes 1997, Vygotsky 1978).

Τα τελευταία χρόνια έχουμε απομακρυνθεί από μια αντίληψη που θεωρεί τα μαθηματικά ως τυπικές αλγοριθμικές διαδικασίες που οφείλουμε να απομνημονεύουμε και να αναπαράγουμε. Το ενδιαφέρον της διδακτικής των μαθηματικών μετατοπίζεται στην διαδικασία της οικοδόμησης της επιδιωκόμενης γνώσης με την εμπλοκή των ίδιων των παιδιών, γεγονός που επιτυγχάνεται ιδιαίτερα μέσω των διαδικασιών επίλυσης λεκτικών προβλημάτων.

Τέλος, σχετικά με την παρούσα έρευνα, πρέπει να σημειώσουμε ότι η πειραματική προσέγγιση με τη μέθοδο των ατομικών συνεντεύξεων, απομονώνει τον ρόλο των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων που λαμβάνουν χώρα στο πλαίσιο της σχολικής αίθουσας με τις συνακόλουθες πιθανές επιρροές στις συμπεριφορές και τις ερμηνείες των μαθητών και μαθητριών, γεγονός που δημιουργεί την ανάγκη για πρόσθετη διερεύνηση του θέματος.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Brink, F., J., Van den (2000), Η ρεαλιστική αριθμητική στην εκπαίδευση για τα μικρά παιδιά, στο Ε. Κολέζα (επιμ.), *Ρεαλιστικά Μαθηματικά στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση*, Leader Books, 83-100, Αθήνα.

Dowling, P. (1998), *The Sociology of Mathematics Education. Mathematical Myths/Pedagogic Texts*, London: Falmer Press.

Dowling, P. (2001), Mathematics Education in Late Modernity: Beyond Myths and Fragmentation, in B. Atweh, H. Forgasz & B. Nebres (Eds.), *Sociocultural Research on Mathematics Education,* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Mahwah, New Jersey, 19-36, London.

Duval, R. (1987), Ο ρόλος της ερμηνείας στη μάθηση των μαθηματικών. *Διάσταση,* τεύχος 2, έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας), 56-73.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, Lancaster.

Hershkowitz, R., Parzysz, B., & Van Dormolen, L. (1996), Space and Shape, in A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 161-204, Dordrecht/Boston/London.

Nunes, T. (1997), What Organizes Our Problem-Solving Activities?, in B. Resnick, R. Säljö, C. Pontecorno & B. Burge (eds.), *Discourse, Tools, and Reasoning: Essays on Situated Cognition*, Springer-Verlag, 288-311, Berlin Heidelberg.

Säljö, R. (1994), Μάθηση και μεσολάβηση. Η προσαρμογή της πραγματικότητας σε έναν πίνακα, στο Γ. Παπαμιχαήλ (επιμ.), *Κοινωνιο-Γνωστική προσέγγιση και διδακτικές διαδικασίες της μάθησης των Φυσικών και Λογικο-μαθηματικών εννοιών στο Σχολείο*, 127-148, Gutenberg, Αθήνα.

Veel, R. (1999). Language, knowledge and authority in school mathematics, in Fr. Christie (ed.), *Pedagogy and the Shaping of Consciousness. Linguistic and social Processes.* Continuum, 185-216, London and New York.

Vygotsky, L. (1978), *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press.

Wubbels, T., Korthagen, F., and Broekman, H. (1997). Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 32, 1-28.
Wyndhamn, J. & Säljö, R. (1997), Word Problems and Mathematical Reasoning-A Study of Children's Mastery of Reference and Meaning in Textual Realities, *Learning and Instruction*, 7(4), 361-382.