**Μαθητές της Δ' Τάξης του Δημοτικού μετρούν επιφάνειες.**
**Αξιολόγηση μιας διδακτικής προσέγγισης που ενσωματώνει πολιτισμικά και ιστορικά χαρακτηριστικά**[1]

**Κώστας Ζαχάρος, Αναστασία Κοντοχρήστου**
**zacharos@otenet.gr**

Η μέτρηση του εμβαδού επιπέδων σχημάτων στις πρώτες σχολικές βαθμίδες έχει αποτελέσει το αντικείμενο πολλών ερευνών στο χώρο της μαθηματικής παιδείας [πχ. Battista 1982, Nunes, κ.ά. 1993, Nitabach,κ.ά. 1996, Outhred, κ.ά. 1996, Kidman, κ.ά. 1997] Στις έρευνες αυτές επιχειρείται να διερευνηθεί η φύση των προβλημάτων που ανακύπτουν κατά την διαδικασία της μέτρησης και να ανιχνευτούν οι αιτίες των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν τα παιδιά. Συχνά εντοπίζεται μια ελλιπής κατανόηση των εννοιολογικών χαρακτηριστικών της μέτρησης επιφανειών, γεγονός που αποδίδεται στους τρόπους διδασκαλίας του γνωστικού αυτού αντικειμένου.

Το ενδιαφέρον της έρευνας που θα παρουσιαστεί εδώ εστιάζεται στην σύνοψη της προβληματικής που αναπτύχθηκε από τα ερευνητικά εγχειρήματα στην μέτρηση επιφανειών επιπέδων σχημάτων, καθώς και στην ανίχνευση διδακτικών προσεγγίσεων που θα μπορούσαν να συμβάλλουν σε μια πληρέστερη κατανόηση της διαδικασίας της μέτρησης και μια αποτελεσματικότερη αντιμετώπιση των σχετικών προβλημάτων.

## 1. ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

---

[1] Ζαχάρος, Κ., Κοντοχρήστου, Α. (2002). Μαθητές της Α' Τάξης του Δημοτικού Μετρούν Επιφάνειες. Αξιολόγηση μιας Διδακτικής Προσέγγισης που Ενσωματώνει Πολιτισμικά και Ιστορικά Χαρακτηριστικά. *Θέματα στην Εκπαίδευση*, τόμος 3, τεύχος 2-3, σ. 115-137.

Πολλές από τις παιδαγωγικές προσεγγίσεις και τεχνικές που απαντώνται σήμερα στη διδασκαλία των μαθηματικών είναι αποτέλεσμα μιας μακροχρόνιας εμπειρίας, ενσωματώνουν μια πλούσια ιστορική πορεία και μεταφέρουν διάφορες πολιτισμικές επιρροές. Μάλιστα, προσεγγίσεις της διδακτικής των μαθηματικών που εμφορούνται από μια κοινωνική και πολιτισμική προοπτική ισχυρίζονται ότι η οικειοποίηση των ιδιαίτερων μαθηματικών εννοιών από τα παιδιά, μπορεί να αποδοθεί στην εμπλοκή τους σε οργανωμένες πολιτισμικές δραστηριότητες, στις οποίες τα πολιτισμικά εργαλεία παίζουν ένα σημαντικό ρόλο [Bishop 1983, Vygotsky 1978, Βυγκότσκυ 1988, Cobb 1989, Nunes 1992, Nunes, κ.ά. 1993].

Η διδασκαλία των Μαθηματικών και ιδιαίτερα της Γεωμετρίας, εμπλέκει μια σειρά αναπαραστάσεων που επηρεάζουν τη διαμόρφωση των διαισθητικών αντιλήψεων που χρησιμοποιούν τα παιδιά της πρώιμης κύρια ηλικίας. Οι αναπαραστάσεις αυτές λειτουργούν διαμεσολαβητικά και συνεισφέρουν στην πραγμάτευση του μαθηματικού νοήματος και συνεπώς στην ιδιαίτερη οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης. Στο πλαίσιο αυτής της προσέγγισης προτείνεται και η αξιοποίηση της ιστορικής προοπτικής κατά την διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών.

### 1.1. Η διδακτική συνεισφορά της ιστορικής προσέγγισης

Μια βασική αρχή της προσέγγισης που εμφορείται από την ιστορική προοπτική στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών είναι ο ισχυρισμός «πως η σημασία μιας έννοιας δεν καθορίζεται ολοκληρωτικά από τον σημερινό της ορισμό, αλλά είναι συνισταμένη της ιστορίας της στο παρελθόν όσο και σήμερα...» και ότι «...η γνώση της ιστορίας των εννοιών είναι πολύ χρήσιμη στις έρευνες για την διάγνωση των δυσκολιών των μαθητών» [Sierpinska 1991, σ.13]. Σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή στην διαδικασία οικειοποίησης μιας μαθηματικής έννοιας οφείλουμε να χρησιμοποιούμε την ιστορία της έννοιας αυτής. Η ιστορική προοπτική στη διδασκαλία των μαθηματικών διευκολύνει στην κατανόηση της σημασίας και του νοήματος των μαθηματικών εννοιών και ειδικότερα της Γεωμετρίας με την οποία θα ασχοληθούμε εδώ, ενώ παράλληλα εντάσσει την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης σε ένα ιστορικό και κοινωνικό πλαίσιο [Barbin 1989, σ. 2].

Η γεωμετρία πριν εξελιχθεί σε μια θεωρητική λογική κατασκευή, αποτελούσε ένα ανθρώπινο εργαλείο που όριζε τις σχέσεις του ανθρώπου με τον χώρο και το περιβάλλον του. Ξεκίνησε ως μια προσπάθεια μέτρησης μεγεθών: του μήκους, της επιφάνειας, κλπ. και αναπτύχθηκε σε ένα αυτόνομο επιστημονικό αντικείμενο διακριτό από την ανάπτυξη των αλγεβρικών μεθόδων. Όμως η σημερινή εξέλιξη των μαθηματικών έχει οδηγήσει στην εντύπωση ότι στα μαθηματικά είναι «όλα άλγεβρα» [Fowler 1987, σ. 9]. Η άποψη αυτή είναι το φυσικό αποτέλεσμα μιας «αριθμητικοποίησης» [Fowler 1987, σ. 8] που υφίσταται η επιστήμη των μαθηματικών εδώ και πάνω από τρεις εκατοντάδες χρόνια. Αυτή η τάση της αριθμητικοποίησης διεισδύει σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών. Στην Γεωμετρία για παράδειγμα, «οι ευθείες αντιμετωπίζονται ως 'μήκος', το 'εμβαδόν' ενός ορθογωνίου είναι το αποτέλεσμα του γινομένου των μηκών της βάσης και του ύψους και αυτή η αντίληψη επεκτείνεται στο εμβαδόν των περισσότερων δισδιάστατων σχημάτων» [Fowler 1987, σ. 8-9][2]. Όμως, «τα Ελληνικά Μαθηματικά, μέχρι τον 2ο πχ. αιώνα, είναι σε μεγάλο βαθμό διαφορετικά» και «φαίνονται να είναι απολύτως μη-αριθμητικοποιημένα» [Fowler 1987, σ. 10].

### 1.2 Η «επίθεση» ως μέθοδος μέτρησης επιφανειών

Όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα, αφετηριακός παράγοντας για την δημιουργία και την ανάπτυξη της Γεωμετρίας είναι η διαδικασία της μέτρησης. Η μέτρηση προϋποθέτει την σύγκριση μεγεθών, γεγονός που μας οδηγεί στον προσδιορισμό της ισότητάς τους. Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία η ισότητα των μεγεθών θα επιτευχθεί με την *αρχή της επίθεσης* (από *το επι-θέτω*). Η αρχή της «επίθεσης» είναι μια γενική αποδεικτική αρχή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας προκειμένου να διαπιστωθεί η ισότητα δύο μεγεθών. Σύμφωνα με την αρχή της επίθεσης σαν ίσα θα οριστούν δύο μεγέθη που, επιθέτοντας το ένα στο άλλο, διαπιστώνουμε την ισότητά τους [Bkouche 1992, σ. 80-81]. Η μέθοδος της «επίθεσης» μπορεί να χρησιμοποιηθεί διασταλτικά και

---

[2] Ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η έννοια του εμβαδού στα βιβλία των μαθηματικών της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης δείχνει την επιρροή ενός αλγεβρικού-συμβολικού τρόπου σκέψης [ Αποστολίκας, Γ. κ.ά., 1996].

στον προσδιορισμό της ισότητας δύο επιφανειών, αφού ο λογισμός που αναπτύχθηκε πάνω στα εμβαδά δεν σχετιζόταν με τις σύγχρονες αλγεβρικές υπολογιστικές μεθόδους, αλλά με «ποιοτικές» προσεγγίσεις που προσιδιάζουν στην διαδικασία της «επίθεσης». Στις προσεγγίσεις αυτές περιλαμβάνεται και η διαδικασία της επικάλυψης της μετρούμενης επιφάνειας με επιφάνειες που επιλέγονται ως μονάδες μέτρησης [Battista 1982, Nunes, κ.ά. 1993, Nitabach,κ.ά. 1996]. Επιπλέον, ποιοτικούς τρόπους σύγκρισης επιφανειών θα συναντήσουμε και στον Ευκλείδη όπου «*όταν ήθελε να δείξει ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, απόδειχνε ότι το ένα απ' αυτά μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε, αν κατάλληλα αναπροσαρμοστούν, να παράγουν το άλλο σχήμα*» [Bunt, κ.ά. 1981, σ. 205].

Η «επίθεση», ενώ για τις μικρότερες σχολικές ηλικίες έχει ένα άμεσο χαρακτήρα και παραπέμπει στα «μοντέλα δράσης» που συναντούμε στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών [Brousseau 1991], για τις μεγαλύτερες ηλικίες η δράση αυτή είναι μια νοητική διεργασία κατά την οποία διερευνώνται οι όροι και οι συνθήκες για την σύγκριση των επιφανειών.

Στη μέτρηση επιφανειών θα τονιστεί η αποτελεσματικότητα προσεγγίσεων που χρησιμοποιούν ως μονάδες μέτρησης επιφάνειες, όπως για παράδειγμα συμβαίνει με τον τετραγωνισμό και την επικάλυψη των μετρούμενων επιφανειών με τετραγωνικές μονάδες. Επιπρόσθετα, επισημαίνεται ότι η διαδικασία της ανάλυσης και ανακατασκευής μιας επιφάνειας ή/και η επικάλυψή της μπορεί να συνεισφέρει σε μία λειτουργική κατανόηση της μέτρησής της. Παρόμοια, σε άλλες έρευνες [πχ. Battista 1982, Nunes, κ.ά. 1993, Nitabach,κ.ά. 1996, Outhred, κ.ά. 1996, Kidman, κ.ά. 1997] θα συναντήσουμε μια διαφοροποίηση από παραδοσιακές προσεγγίσεις που βασίζονται στον αλγόριθμο Εμβαδόν=μήκοςΧπλάτος (ή Ε=βάσηΧύψος). Βασικός ισχυρισμός των ερευνών αυτών είναι ότι η διαδικασία μέτρησης μπορεί να γίνει αποτελεσματικότερη όταν υπάρχει *αντιστοιχία μεταξύ της διάστασης του εργαλείου μέτρησης και της διάστασης της μετρούμενης επιφάνειας*. Στις παραπάνω έρευνες δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο γεγονός *της διαφοράς μεταξύ της διαδικασίας μέτρησης του μήκους και του εμβαδού*. Επισημαίνεται, δηλαδή, ότι ενώ το μήκος μετράται άμεσα, το εμβαδόν υπολογίζεται έμμεσα με την χρήση επιμηκών μεγεθών που εισάγονται στον τύπο του εμβαδού. Στον έμμεσο αυτό τρόπο προσδιορισμού του εμβαδού αποδίδονται τα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην κατανόηση του. Γι' αυτό προτείνονται ως μονάδες μέτρησης επιφανειών δισδιάστατες μονάδες (πχ. τετράγωνα, ορθογώνια, κλπ). Υπογραμμίζεται, τέλος, ότι ο σχεδιασμός της έρευνας και οι συνθήκες εκτέλεσής της επηρεάζουν τις στρατηγικές που επιλέγονται για την αντιμετώπιση των προβλημάτων [Nunes, κ.ά. 1993].

Στην έρευνά μας θα ασχοληθούμε με την μέτρηση του εμβαδού επιπέδων σχημάτων από μαθητές και μαθήτριες της Δ’ τάξης του Δημοτικού. Επιλέξαμε έναν «ποιοτικό» τρόπο προσέγγισης της έννοιας της μέτρησης του εμβαδού που σχετίζεται με το θεωρητικό πλαίσιο που αναπτύξαμε ανωτέρω. Αναλυτικότερα, υποβάλλουμε τα υποκείμενα της έρευνάς μας σε μια διδασκαλία για τη μέτρηση επιφανειών που προβάλλει τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας της μέτρησης. Η διαδικασία της «επίθεσης», η ανάλυση και ανασύνθεση των επιφανειών και τα εργαλεία μέτρησης που προτείνουμε συνεισφέρουν στη κατεύθυνση αυτή.

Στην υπόθεσή μας ισχυριζόμαστε ότι:

- Οι μαθητές/τριες της Δ’ τάξης του Δημοτικού που αποτελούν το δείγμα της έρευνάς μας μπορούν να ανταποκριθούν σε προβλήματα υπολογισμού του εμβαδού ακόμη και σε περιπτώσεις σύνθετων σχημάτων που δεν ανήκουν στα προτεινόμενα από το αναλυτικό πρόγραμμα.
- Η διδασκαλία στην οποία υποβάλλονται τα υποκείμενα του δείγματός μας, όπως επίσης και τα «εργαλεία» μέτρησης που τους παρέχονται, συντελούν στην επιλογή στρατηγικών αντιμετώπισης των προβλημάτων που περιλαμβάνουν την επίθεση, τον τετραγωνισμό των επιφανειών και την απαρίθμηση.

## 2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ

### 2.1 Το δείγμα της έρευνας

Το δείγμα της έρευνας συγκροτήθηκε από τους μαθητές και τις μαθήτριες ενός τμήματος της Δ' Δημοτικού ενός δημόσιου σχολείου του Περάματος Αττικής. Από τα 26 παιδιά του τμήματος περιλάβαμε στο δείγμα μας μόνο τα 21, όσα παρευρισκόταν στο τμήμα την ημέρα που παρουσιάσαμε μια διδασκαλία πάνω στην έννοια της σύγκρισης και μέτρησης επιφανειών. Στην Δ' Δημοτικού εισάγεται για πρώτη φορά ο υπολογισμός του εμβαδού του ορθογωνίου.

## 2.2 Η διδασκαλία

Τα υποκείμενα τη έρευνάς μας υποβάλλονται σε ιδιαίτερη διδασκαλία βάσει ενός υποδείγματος που δίνεται στη διδάσκουσα της τάξης. Με το σχέδιο μαθήματος που προτείνουμε προσπαθούμε να τονίσουμε τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της μέτρησης του εμβαδού. Συγκεκριμένα τονίζεται:

i. *Η ευκλείδεια μέθοδος σύγκρισης επιφανειών.* Επισημαίνεται ότι όταν ο Ευκλείδης ήθελε να δείξει ότι δύο σχήματα έχουν ίσα εμβαδά, απόδειχνε ότι το ένα απ' αυτά μπορεί να χωριστεί σε μέρη τέτοια ώστε, αν κατάλληλα ανασυντεθούν, να δημιουργήσουν το άλλο σχήμα.

ii. *Η αρχή της «επίθεσης»* . Η ευκλείδεια Γεωμετρία χρησιμοποιεί ως μια γενική αποδεικτική μέθοδο την αρχή της «επίθεσης». Σύμφωνα με την αρχή αυτή η σύγκριση δύο μεγεθών θα επιτευχθεί επιθέτοντας το ένα πάνω στο άλλο. Εδώ χρησιμοποιούμε μια διασταλτική ερμηνεία της έννοιας της «επίθεσης» που εμπεριέχει και την μέτρηση/επικάλυψη επιφανειών.

iii. *Η σχέση εμβαδού-περιμέτρου.* Παρατηρείται, αρκετά συχνά, μια σύγχυση μεταξύ των σχέσεων εμβαδού και περιμέτρου. Δημιουργείται η εντύπωση μιας σχέσης μονοτονίας στην αλλαγή αυτών των δύο μεγεθών: Δηλαδή, μικρότερη περίμετρος ⇔ μικρότερο εμβαδόν ή μεγαλύτερη περίμετρος ⇔ μεγαλύτερο εμβαδόν ή τέλος, ίσες περίμετροι ⇔ ίσα εμβαδά.

Για όλα τα παραπάνω θέματα προτείνονται αντίστοιχες δραστηριότητες (βλέπε στο παράρτημα II) που υλοποιούνται στην διάρκεια της «διδασκαλίας» ώστε να εξοικειωθούν οι μαθητές/τριες με τα θέματα αυτά.

Η διδασκαλία έχει διάρκεια περίπου δύο διδακτικών ωρών (45’+45’) και αποτελεί μια εισαγωγή στην έννοια του εμβαδού και της μέτρησής του.

## 2.3. Η διαδικασία συλλογής των εμπειρικών δεδομένων

Δύο εβδομάδες μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της ενότητας της μέτρησης επιφανειών, τα υποκείμενα συμμετέχουν σε μια ημι-δομημένη ατομική συνέντευξη, όπου καλούνται να απαντήσουν σε έργα που σχετίζονται με συγκρίσεις και μετρήσεις επιφανειών, καθώς και τις σχέσεις περιμέτρου-εμβαδού, διαφορετικά από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στη διδασκαλία (βλέπε στο παράρτημα I). Η συνέντευξη εμπεριέχει και στοιχεία «διδασκαλίας» [Beck, κ.ά. 1992-93]. Η παρουσίαση, δηλαδή, κάθε νέου έργου θα γίνει αφού απαντηθεί το προηγούμενο, είτε από τον μαθητή/την μαθήτρια, είτε με την βοήθεια του ερευνητή. Οι μαθητές/τριες καλούνται να απαντήσουν στα ερωτήματα του φύλλου εργασίας που τους προτείνουμε (παράρτημα Ι). Εκτός από τις γραπτές απαντήσεις των μαθητών/τριων που καταγράφονται στο φύλλο εργασίας, οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνούνται για περαιτέρω διερεύνηση.

## 3. ΤΑ ΕΜΠΕΙΡΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΚΑΙ Η ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥΣ

***1ο έργο. Ορισμός της περιμέτρου και του εμβαδού***

Εδώ προσπαθούμε να διερευνήσουμε αν τα υποκείμενα γνωρίζουν τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού ενός επιπέδου σχήματος. Σκοπός μας είναι να γίνουν κατανοητές οι παραπάνω έννοιες, ώστε να συνεχίσουμε απρόσκοπτα στα επόμενα έργα. Γι’ αυτό ζητείται από τους μαθητές και τις μαθήτριες να δώσουν περιγραφικούς ορισμούς των εννοιών της περιμέτρου και του εμβαδού. Συγκεκριμένα τους ζητείται να δείξουν ή να ζωγραφίσουν την περίμετρο και το εμβαδόν του σχήματος 1 του παραρτήματος Ι. Η ορολογία που χρησιμοποιείται συνήθως από τους μαθητές για την έκφραση της περιμέτρου είναι το «γύρο – γύρο» και για το εμβαδόν το «μέσα». Οι ίδιες εκφράσεις χρησιμοποιούνται και από τον ερευνητή ως εναλλακτικές της επίσημης μαθηματικής ορολογίας όταν κρίνεται ότι οι έννοιες αυτές δεν είναι κατανοητές από τα παιδιά. Τα ποσοτικά δεδομένα από τις απαντήσεις των παιδιών στο έργο αυτό καταγράφονται στο πίνακα 1.

Πίνακας 1. Οι επιτυχίες στον προσδιορισμό της περιμέτρου και του εμβαδού

| | Επιτυχία | Αποτυχία |
|---|---|---|
| Περίμετρος | 17 | 4 |
| Εμβαδόν | 16 | 5 |

Αφού εξηγήσουμε στους μαθητές και μαθήτριες που απέτυχαν τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού συνεχίζουμε στο επόμενο έργο.

***2ο έργο. Σύγκριση των επιφανειών σχημάτων.***

Η σύγκριση των επιφανειών θα γίνει με την χρήση του «αξιώματος της προσθετικότητας» (additivity axiom) [Wagman, 1975] που παραπέμπει στην ευκλείδεια αρχή της ανάλυσης και της ανασύνθεσης των συγκρινόμενων επιφανειών με τρόπο που να είναι δυνατή η σύγκρισή τους. Τα έργα αυτά έχουν ως σκοπό να διερευνηθεί ο βαθμός οικειοποίησης από τα παιδιά μιας βασικής αρχής της μέτρησης, σύμφωνα με την οποία, μια ποσότητα μένει αμετάβλητη στην διαδικασία της ανάλυσής της και της ανασύνθεσής της. Δηλαδή, αν η πολυγωνική επιφάνεια Ε χωριστεί σε πεπερασμένο αριθμό επιφανειών Ε1, Ε2,...Εν, τότε, Ε1+Ε2+...+Εν = Ε.

Η δυνατότητα χρήσης του προσθετικού αξιώματος θα διερευνηθεί στα σχήματα 2 και 3 του παραρτήματος Ι. Τα σχήματα παρουσιάζονται με τέτοιο τρόπο ώστε να υποδεικνύεται η δυνατότητα της ανάλυσης και της ανασύνθεσής τους. Στους/στις μαθητές/τριες που δυσκολεύονται να απαντήσουν μόνο από την απλή παρατήρηση των σχημάτων, δίνονται κάρτες με τα σχήματα που συνθέτουν τις επιφάνειες.

Τα ποσοτικά δεδομένα από τις απαντήσεις των μαθητών/τριών καταγράφονται στον πίνακα 2.

Πίνακας 2. Οι επιτυχίες και αποτυχίες στα σχήματα 2 και 3 του παραρτήματος

| | Επιτυχία | Αποτυχία |
|---|---|---|
| Σχήμα 2 | 16 | 5 |
| Σχήμα 3 | 17 | 4 |

Η συνήθης στρατηγική που αναπτύσσεται εδώ είναι η σύγκριση των τμημάτων που συνθέτουν τα δύο σχήματα ή ο (νοητός) μετασχηματισμός της μιας ώστε να παραχθεί η άλλη. Στην περίπτωση των χάρτινων καρτών η συνήθης πρακτική είναι η ανάλυση και ανασύνθεση της μιας εκ των δύο επιφανειών ώστε να παραχθεί η άλλη. Σε ορισμένες πάλι περιπτώσεις τα παιδιά λειτουργούν με αισθητηριακές αντιλήψεις που βασίζονται όμως σε ένα νοητικό συντονισμό των δύο διαστάσεων των σχημάτων. Όπως στην περίπτωση μιας μαθήτριας που ισχυρίζεται ότι τα σχήματα 2 έχουν το ίδιο εμβαδόν:

Υ(υποκείμενο): «Γιατί αυτό (το Β) είναι πιο κοντό και πιο μακρύ, κι αυτό (το Α) είναι πιο ψηλό και χοντρό».

Στην συνέχεια δίνεται το σχήμα Α σε καρτελάκια.

Ε(Ερευνητής): «Να αυτό είναι το πρώτο σχήμα. Μπορείς από αυτό να φτιάξεις το δεύτερο;»

Η μαθήτρια αναλύει σε μέρη την επιφάνεια Α και μετά από σύντομες δοκιμές φτιάχνει την Β. Για τα σχήματα 3 η ίδια μαθήτρια ισχυρίζεται ότι έχουν επίσης ισοδύναμες επιφάνειες, γιατί,

«αυτό (το Β) είναι ψηλό και λεπτό και αυτό (το Α) είναι κοντό και λεπτό».

Περνάμε ξανά στις καρτέλες και δίνουμε το σχήμα Α.

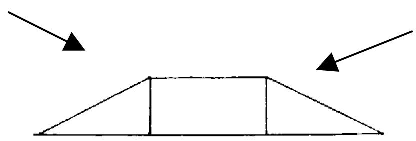
Ε: «Μπορούμε από το σχήμα αυτό (το Α) να φτιάξουμε το άλλο (το Β);»

Υ: «Ναι».

Η μαθήτρια χειρίζεται με ευκολία τον μετασχηματισμό της επιφάνειας Α στην Β.

Ένα άλλο υποκείμενο ισχυρίζεται ότι οι δύο επιφάνειες του σχήματος 2 είναι ισοδύναμες,

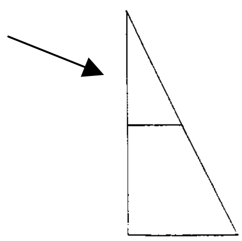
«Γιατί αυτό δεν είναι πάνω έχει φύγει από πάνω και είναι στο πλάι (σχ. 1)».



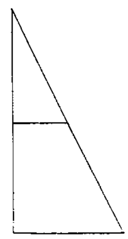
Σχήμα 1

Για τις επιφάνειες 3 το ίδιο υποκείμενο διαπιστώνει ότι

Υ: «Είναι ίσες γιατί αυτό (το τρίγωνο) έφυγε και έχει πάει πάνω (σχ. 2)».



Σχήμα 2



Σχήμα 2

Τα λάθη στην σωστή σύγκριση υποδεικνύουν μια δυσκολία συντονισμού στην παρατήρηση των δύο διαστάσεων των σχημάτων, γεγονός που παραπέμπει στα προβλήματα διατήρησης που συναντούμε σε πειράματα του Piaget. Τα υποκείμενα επικεντρώνουν την προσοχή τους σε μια μόνο διάσταση του σχήματος. Έτσι, ένας μαθητής θα δηλώσει για τα σχήματα 2 πως το Α έχει μεγαλύτερη επιφάνεια γιατί είναι «*ψηλότερο*», ενώ το Β «*μικρότερο*» και για τους ίδιους λόγους η Β είναι μεγαλύτερη στα σχήματα 3.

***<u>3ο έργο.</u> Η κατασκευή ενός εργαλείου μέτρησης επιφανειών***

Σκοπός μας εδώ είναι να ελέγξουμε την επίδραση που θα έχουν τα εργαλεία μέτρησης που διαθέτουν τα παιδιά, στις στρατηγικές που θα επιλέξουν για να αντιμετωπίσουν το κάθε πρόβλημα, καθώς και την αποτελεσματικότητα των εργαλείων αυτών.

Συγκεκριμένα ζητείται να υπολογιστεί:

- Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου διαστάσεων 4cmX6cm (σχ. 4 του παραρτήματος Ι).
- Το εμβαδόν ενός μη κανονικού γεωμετρικού σχήματος (σχ. 5 του παραρτήματος Ι). Το σχήμα αυτό το επιλέξαμε για να διαπιστώσουμε τις στρατηγικές που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν αντιμετωπίζουν σχήματα που δεν προσφέρονται για μια άμεση εφαρμογή του τύπου Ε=βάσηΧύψος, καθώς και την αποτελεσματικότητα των στρατηγικών που επιλέγονται.
- Το εμβαδόν ενός τραπεζίου (σχ. 6 του παραρτήματος Ι). Οι μαθητές/τριες της τάξης αυτής δεν έχουν διδαχθεί τρόπους υπολογισμού του εμβαδού τραπεζίου. Έτσι ενδιαφερόμαστε για την δυνατότητα επινόησης εναλλακτικών τρόπων προσέγγισης που απορρέουν από την διδασκαλία και την χρήση των εργαλείων.

*Τα εργαλεία μέτρησης των μαθητών/τριών:*

Ως εργαλεία μέτρησης των επιφανειών δίνονται:

- Η τετραγωνική μονάδα πλευράς 1cm που βρίσκεται σχεδιασμένη στο φύλλο εργασίας και τα παιδιά καλούνται να χρησιμοποιήσουν.
- Ένας χάρακας χωρίς υποδιαιρέσεις (κανόνας) για να διευκολύνει στην χάραξη ευθειών.
- Ένα τετραγωνικό χαρτονάκι πλευράς 1cm για τις περιπτώσεις που διαπιστώνεται δυσκολία στην «μεταφορά» της σχεδιασμένης τετραγωνικής μονάδας πάνω στην μετρούμενη επιφάνεια.

Οι μαθητές σημειώνουν με μολύβι, ώστε να έχουν την δυνατότητα της διόρθωσης.

Οι επιτυχίες των μαθητών στο 3ο έργο καταγράφονται στον πίνακα 3. Επιτυχείς δεν θεωρούνται μόνο οι προσπάθειες που δίνουν ένα ακριβές αριθμητικό αποτέλεσμα, αλλά και οι περιπτώσεις που τα εργαλεία μέτρησης οδηγούν σε μια σωστή, από τη άποψη της διαδικασίας, μέθοδο μέτρησης.

Πίνακας 3. Επιτυχίες στα σχήματα 4, 5 και 6

| | Επιτυχία | Αποτυχία |
|---|---|---|
| Σχήμα 4 | 15 | 6 |
| Σχήμα 5 | 16 | 5 |
| Σχήμα 6 | 14 | 7 |

Στην συνέχεια επιχειρούμε μια ποιοτική ανάλυση των στρατηγικών των μαθητών/τριών. Η ανάλυση αναφέρεται τόσο στους τρόπους χρήσης των εργαλείων μέτρησης που έχουν στην διάθεσή τους οι μαθητές/τριες, όσο και στις μεθόδους μέτρησης που επιλέγονται για κάθε σχήμα (σχήματα 4, 5 και 6 του παραρτήματος Ι).

***Σχήμα 4***

*Η κατασκευή ενός εργαλείου μέτρησης μήκους.*

Η δυσκολία στην μέτρηση των πλευρών του ορθογωνίου και στην αναπαραγωγή της μοναδιαίας επιφάνειας οδηγούν αρκετά υποκείμενα (δώδεκα μαθητές/τριες) στην κατασκευή ενός μέτρου μέτρησης μηκών.

*i. Η χρήση του χάρακα.* Δώδεκα μαθητές αφού τοποθετήσουν τον κανόνα κατά μήκος της πλευράς της τετραγωνικής μονάδας σημειώνουν με το μολύβι τους πάνω στον κανόνα το 1 cm. Το μήκος αυτό το αναπαράγουν κατά μήκος δύο διαδοχικών πλευρών. Ειδικότερα δύο υποκείμενα κατασκευάζουν ένα πληρέστερο μέτρο μέτρησης, σημειώνοντας πάνω στον κανόνα ενδείξεις που αντιστοιχούν στους αριθμούς 1,2,3, κλπ.

*ii. Η χρήση του τετραγωνικού προτύπου.* Εδώ χρησιμοποιείται η μία πλευρά της τετραγωνικής μοναδιαίας κάρτας ως μονάδα μήκους και σημειώνονται οι ενδείξεις του ενός εκατοστού σε δύο διαδοχικές πλευρές του σχήματος (τρεις μαθητές/τριες).

<u>*Οι στρατηγικές μέτρησης των επιφανειών*</u>

*i. Η χρήση της επίθεσης.* Στην κατηγορία αυτή εντάξαμε τους μαθητές και μαθήτριες που χρησιμοποιούν τον κανόνα με την σημειωμένη απ' αυτούς/αυτές ένδειξη του 1cm μόνο για την αναπαραγωγή στην επιφάνεια της τετραγωνικής μονάδας, καθώς και αυτούς/αυτές που αναπαράγουν την τετραγωνική μονάδα με το καρτελάκι. Πρόκειται εδώ για μια διαδικασία οικοδόμησης της μοναδιαίας επιφάνειας. Η οικοδόμηση των μοναδιαίων οντοτήτων και ο συντονισμός των μονάδων μέτρησης είναι μια νοητική διαδικασία τεμαχισμού της εμπειρικής πραγματικότητας κατά την οποία απομονώνεται ένα χαρακτηριστικό, ενώ την ίδια στιγμή το χαρακτηριστικό αυτό εντάσσεται σε μια ολιστική προοπτική. Η διαδικασία αυτή αποτελεί την βάση της παιδικής έλλογης δραστηριότητας στο θέμα της οικοδόμησης της έννοιας του εμβαδού [Wheatley, κ.ά. 1996, Reynolds, κ.ά. 1996]. Η στρατηγική της επίθεσης παίρνει διάφορες μορφές:

Περιλαμβάνει την χρήση του τετραγωνικού προτύπου ή του κανόνα με την σημειωμένη ένδειξη του ενός εκατοστού για τον τετραγωνισμό της επιφάνειας και στην συνέχεια την απαρίθμηση των τετραγώνων (επτά μαθητές/τριες). Για παράδειγμα μια μαθήτρια προσπαθεί με τον κανόνα να τετραγωνίσει την επιφάνεια. Υπογραμμίζουμε στα υποκείμενα πως τα τετραγωνάκια πρέπει να έχουν τις διαστάσεις του τετραγωνικού εκατοστού.

Υ: «Τι να κάνω; Να βάλω σημάδι στο χάρακα πάνω;»

Ε: «Είναι μια καλή ιδέα!»

Σημειώνει την πλευρά της τετραγωνικής μονάδας στον χάρακα. Στην συνέχεια σημειώνει κατά μήκος των δύο καθέτων πλευρών και τετραγωνίζει (όχι με μεγάλη ακρίβεια) την επιφάνεια.

Ε: «Πόσα τετραγωνάκια χωράνε;»

Υ: «Είκοσι».

Ε: «Δηλαδή, πόσο είναι το εμβαδόν αυτού του σχήματος;»

Υ: «Είκοσι τετραγωνάκια, τετραγωνικά εκατοστά».

Μερικές φορές η επίθεση είναι μια νοητική διαδικασία, όπως στην περίπτωση της χρήσης της μοναδιαίας κάρτας ως μονάδας μήκους για την χάραξη των δύο διαδοχικών πλευρών του ορθογωνίου και στην συνέχεια την απαρίθμηση των τεσσάρων *νοητών* γραμμών που η καθεμιά τους περιέχει από μια εξάδα (ένας μαθητής).

*ii. Χρήση του τύπου.* Εδώ εντάξαμε όσους/όσες καταφεύγουν στον τύπο για την μέτρηση της επιφάνειας του σχήματος 4. Τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται από τους μαθητές και τις μαθήτριες για την μέτρηση των πλευρών του σχήματος είναι:

- Το τετραγωνικό πρότυπο που εδώ χρησιμοποιείται ως μονάδα μήκους για την σημείωση του μήκους δύο διαδοχικών πλευρών του ορθογωνίου (δύο μαθητές).
- Ο βαθμολογημένος με την βοήθεια του τετραγωνικού προτύπου κανόνας (πέντε μαθητές).

Για παράδειγμα ένας μαθητής για την εύρεση του εμβαδού του σχήματος προτείνει:

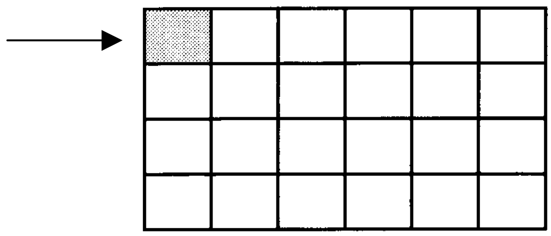
Υ: «Να πολλαπλασιάσουμε το μήκος με το πλάτος».

Ε: «Σύμφωνοι, αλλά πόσο είναι το μήκος και πόσο το πλάτος;»

Μετά από λίγη σκέψη τοποθετεί τον κανόνα στην πλευρά του τετραγώνου και σημειώνει ενδείξεις που αντιστοιχούν στους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 και 6. Σημειώνει τις δύο διαδοχικές πλευρές του ορθογωνίου και πολλαπλασιάζει 4Χ6=24.

*iii. Μικτές στρατηγικές.* Πρόκειται για μια μικτή μέθοδο που περιλαμβάνει την επικάλυψη του ορθογωνίου κατά μήκος δύο διαδοχικών πλευρών με τετραγωνικές μονάδες και στην συνέχεια την εφαρμογή του τύπου Ε=μήκοςΧπλάτος. Μια μαθήτρια που χρησιμοποιεί την στρατηγική αυτή, αφού τετραγωνίσει την επιφάνεια με την χρήση του τετραγωνικού προτύπου, στην συνέχεια βρίσκει εμβαδόν 4Χ5=20 τ. εκατοστά γιατί δεν υπολογίζει στην οριζόντια καταμέτρηση των τετραγώνων το γωνιακό τετράγωνο (σχ. 3). Σημειώνουμε ότι το σφάλμα αυτό έχει εντοπιστεί ακόμη και σε ενήλικες φοιτητές παιδαγωγικών τμημάτων (Simon, 1995).

Σχήμα 3



***Σχήματα 5 και 6***

i. *Οι στρατηγικές της επιτυχίας.* Οι μαθητές/τριες που επιτυγχάνουν στην μέτρηση των επιφανειών των σχημάτων 5 και 6 του παραρτήματος Ι είναι τα υποκείμενα που τετραγωνίζουν την επιφάνεια του σχήματος και απαριθμούν τα τετραγωνικά εκατοστά που σχηματίζονται. Σε δύο μάλιστα περιπτώσεις ο τετραγωνισμός της επιφάνειας του σχήματος 5 είναι νοητός και τα υποκείμενα απαριθμούν νοητά τετράγωνα.

ii. *Οι στρατηγικές της αποτυχίας.* Οι μαθητές/τριες που αποτυγχάνουν προσφεύγουν κύρια στη χρήση του τύπου που μας δίνει το εμβαδόν του ορθογωνίου. Τα υποκείμενα αυτά επηρεασμένα από τη χρήση του τύπου *Ε=μήκοςΧπλάτος*, προσπαθούν να τον χρησιμοποιήσουν, ακόμη και στις περιπτώσεις που είναι εμφανείς οι δυσκολίες για ένα τέτοιο εγχείρημα.

Παρατηρήθηκε ότι οι στρατηγικές που επιλέγονται στο σχήμα 4 ακολουθούνται συνήθως και στην αντιμετώπιση των σχημάτων 5 και 6. Όπως μας δείχνει ο πίνακας 3 οι μαθητές υιοθετούν μοντέλα δράσης αρκετά αποτελεσματικά, αφού δίνεται η δυνατότητα αντιμετώπισης προβλημάτων μέτρησης επιφανειών σε σχήματα όπου τα συνήθη σχολικά εργαλεία θα ήταν ανεπαρκή[3]. Ειδικότερα, όλα τα παιδιά που

[3] Ο μεγάλος βαθμός αποτυχίας των μαθητών/τριών στην μέτρηση επιφανειών όπως των σχημάτων 5 και 6 του παραρτήματος διαπιστώθηκε και σε έρευνά μας που τα

επιτυγχάνουν στο σχήμα 6, ανήκουν σ' αυτούς/αυτές που επιτυγχάνουν στο 4 και/ή στο 5 (εκτός μιας περίπτωσης). Όσοι και όσες επιτυγχάνουν στη μέτρηση της επιφάνειας του σχήματος 6 ανήκουν σ' αυτούς/αυτές που χρησιμοποιούν τουλάχιστον σε ένα από τα σχήματα 4 και 5 την μέθοδο του τετραγωνισμού και της απαρίθμησης, εκτός μιας περίπτωσης όπου το υποκείμενο, ενώ τετραγωνίζει την επιφάνεια 5 στην συνέχεια αντί να απαριθμήσει πολλαπλασιάζει: 5{ο αριθμός των τετραγώνων της βάσης}Χ4{ο αριθμός των υπόλοιπων τετραγώνων}. Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι η αποτυχία των μαθητών/τριών στον υπολογισμό του εμβαδού του ορθογωνίου δεν σημαίνει ότι δεν θα μπορούσαν να το υπολογίσουν με την χρήση του τύπου, όπως φαίνεται από την αντιμετώπιση αντίστοιχων έργων (βλέπε στη συνέχεια το 5ο έργο). Δείχνει απλά την δυσκολία των συγκεκριμένων μαθητών να επινοήσουν τρόπους για την χρήση των εργαλείων μέτρησης που τους προτείνονται.

***4º έργο. Σχέσεις εμβαδού-περιμέτρου***

Στα πειράματα των Piaget & Inhelder σχετικά με την έννοια του εμβαδού αναφέρεται πως η τροποποίηση των τοπολογικών χαρακτηριστικών των σχημάτων επηρεάζει τις κρίσεις των μαθητών/τριών σχετικά με το εμβαδόν τους. Επιπλέον, οι λανθασμένες παραστάσεις των παιδιών για τις σχέσεις εμβαδού και περιμέτρου δημιουργούν την πεποίθηση μιας μονοτονίας στο τρόπο αλλαγής των μεγεθών αυτών.

Στο 4ο έργο θα πρέπει κατ' αρχήν να συγκριθούν οι περίμετροι των σχημάτων 7 του παραρτήματος Ι. Για να διευκολύνουμε τα παιδιά στον υπολογισμό της περιμέτρου δίνουμε ένα χάρακα με αριθμητικές ενδείξεις. Στην συνέχεια τους ζητείται να συγκρίνουν τις επιφάνειες Α και Β και να υποδείξουν τρόπους ώστε να επιτευχθεί η σύγκριση και να καταστεί αξιόπιστη.

Το σχήμα Β είναι ισοδύναμο με το Α και προκύπτει με την τροποποίησή του, ενώ για τις περιμέτρους ισχύει ότι Περίμετρος (Α)<Περίμετρος (Β).

*Υπολογισμός της περιμέτρου*: Τα αποτελέσματα του υπολογισμού της περιμέτρου καταγράφονται στον πίνακα 4.

---

υποκείμενά της είναι παιδιά της ΣΤ’ Δημοτικού και Α’ τάξης του Γυμνασίου[Ζαχάρος, 2000].

Πίνακας 4. Επιτυχίες στον υπολογισμό της περιμέτρου (Π) των σχημάτων 7 του παραρτήματος.

| | Επιτυχία | Αποτυχία |
|---|---|---|
| Π(Α) | 16 | 5 |
| Π(Β) | 6 | 15 |

Είναι χαρακτηριστικό πως η αποτυχία στον υπολογισμό της περιμέτρου του σχήματος Α (τέσσερα υποκείμενα) οφείλεται στην σύγχυση μεταξύ περιμέτρου και εμβαδού. Έτσι η περίμετρος είναι 2Χ3=6. Η αποτυχία στον υπολογισμό της περιμέτρου του σχήματος Β οφείλεται στην πλειοψηφία (έντεκα υποκείμενα) στην συστηματική παράληψη υπολογισμού των κάθετων ή οριζόντιων μοναδιαίων τμημάτων, ενώ σε μία περίπτωση αφού μετρηθούν οι δύο διαδοχικές πλευρές χρησιμοποιείται η πολλαπλασιαστική μέθοδος (περίμετρος=3Χ3=9).

*Σύγκριση εμβαδών:* Οι συχνότητες για τις απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις σχετικά με την σύγκριση των εμβαδών παρουσιάζονται στον πίνακα 5.

Πίνακας 5. Οι απαντήσεις των μαθητών στην σύγκριση των εμβαδών (Ε)

| | Ε(Α)>Ε(Β) | Ε(Α)<Ε(Β) | Ε(Α)=Ε(Β) | Δεν εκφράζεται άποψη |
|---|---|---|---|---|
| Αρ. Μαθ. | 0 | 8 | 6 | 7 |

Η πλειοψηφία των υποκειμένων που ισχυρίζονται ότι Ε(Β)>Ε(Α) (έξι από τα οκτώ) στηρίζουν τον ισχυρισμό τους στη συνεπαγωγή Π(Β)>Π(Α) => Ε(Β)>Ε(Α), ενώ τα υπόλοιπα βασίζονται στην αισθητηριακή τους αντίληψη («*είναι Ε(Β)>Ε(Α) γιατί έτσι φαίνεται*») που ενδεχομένως επηρεάζεται από τα τοπολογικά χαρακτηριστικά των σχημάτων [Piaget, κ.ά., 1956]. Οι μαθητές που ισχυρίζονται ότι Ε(Α)=Ε(Β) βασίζουν τον ισχυρισμό τους στην αισθητηριακή τους αντίληψη και σε μια περίπτωση διαπιστώνεται ότι η επιφάνεια Β προκύπτει από τον μετασχηματισμό του σχήματος Α. Τέλος, παρατηρούμε ότι τέσσερις μαθητές και μαθήτριες συγχέουν τις έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου καθώς και τις μεταξύ τους σχέσεις, γεγονός που καταγράφεται και σε άλλες έρευνες [πχ. Kennedy 1993, Kouba, κ.ά. 1988, Piaget, κ. ά. 1960, Russel 1976, Tierney, κ.ά. 1990]

***<u>5ο έργο</u>. Το φυσικό περιεχόμενο της αριθμητικής έκφρασης του εμβαδού***

Στο έργο αυτό προσπαθούμε να εξακριβώσουμε αν η αριθμητική έκφραση του εμβαδού εμπεριέχει για τους μαθητές και μαθήτριες αυτής της εκπαιδευτικής βαθμίδας κάποιο φυσικό νόημα ή όχι. Για τον λόγο αυτό σχεδιάζουμε στην διάρκεια της συνέντευξης, παρουσία των υποκειμένων, ένα ορθογώνιο διαστάσεων 3cmX5cm και σημειώνουμε στις πλευρές του τις διαστάσεις. Ζητείται κατ' αρχήν να υπολογιστεί το εμβαδόν του ορθογωνίου με την βοήθεια του τύπου που διδάχτηκαν και στην περίπτωση που τον αγνοούν τους τον υπενθυμίζει ο ερευνητής. Στην συνέχεια, αφού τους δείξουμε ένα σχεδιασμένο τετραγωνικό εκατοστό ζητείται να απαντήσουν πόσα τέτοια τετραγωνάκια χωράνε, κατά την άποψή τους, στην επιφάνεια του ορθογωνίου χωρίς αυτή να τετραγωνιστεί.

<u>Τα αποτελέσματα στο 5$^{o}$ έργο</u>

Από το σύνολο των υποκειμένων, επτά φαίνεται ότι δεν κατανοούν το φυσικό περιεχόμενο της αριθμητικής έκφρασης του εμβαδού που είναι $E=3X5=15cm^2$ και δίνουν διαφορετικούς αριθμούς τετραγωνικών εκατοστών. Για παράδειγμα, δύο υποκείμενα θεωρούν ότι η επιφάνεια «*χωράει*» 3+5=8 τετραγωνάκια, δύο μετρούν περιμετρικά κατά μήκος των πλευρών 5+3+5+3=16 τετραγωνάκια, ενώ στις υπόλοιπες περιπτώσεις δεν αιτιολογούνται οι λανθασμένες απαντήσεις. Τα παιδιά αυτά ανήκουν στην κατηγορία αυτών που, είτε, χρησιμοποιούν την πολλαπλασιαστική μέθοδο στην εύρεση του εμβαδού του ορθογωνίου στα έργα 3 και 4 (πέντε υποκείμενα), είτε, αποτυγχάνουν στα έργα αυτά (δύο υποκείμενα).

***<u>6ο έργο</u>. Πρόσθετα διδακτικά εργαλεία: η χρήση του τετραγωνισμένου χαρτιού***

Διδακτικές προσεγγίσεις προτείνουν την μέτρηση επιφανειών με την σχεδίαση των σχημάτων σε dot paper ή τετραγωνισμένο χαρτί. Η προσέγγιση αυτή πιστεύεται ότι εξοικειώνει τους μαθητές και τις μαθήτριες με την χρήση της μονάδας μέτρησης

επιφανειών και διευκολύνει στην επιτυχή μέτρηση μη κανονικών γεωμετρικών σχημάτων, ιδιαίτερα εκεί που η άμεση χρήση των τύπων είναι αδύνατη.
Τα σχήματα 8 του παραρτήματος Ι που χρησιμοποιούνται εδώ είναι ανάλογα με αυτά που παρουσιάζονται σε ερευνητική εργασία της K. Hart (1981). Είναι σχεδιασμένα σε τετραγωνισμένο χαρτί με τετράγωνα του ενός εκατοστού και ζητείται να υπολογιστεί το εμβαδόν τους. Ειδικότερα στον υπολογισμό του εμβαδού του σχήματος Δ μας ενδιαφέρει μια προσεγγιστική έκφραση του εμβαδού γι' αυτό και δεχόμαστε ως σωστές τις προσεγγίσεις που παίρνουν τιμές στο διάστημα από 8 έως 10.
Οι επιτυχίες των μαθητών/τριών καταγράφονται στον πίνακα 6.

Πίνακας 6. Οι συχνότητες των επιτυχιών και αποτυχιών στο 6ο έργο

| | Επιτυχία | Αποτυχία |
|---|---|---|
| Σχήμα 8Α | 18 | 3 |
| Σχήμα 8Β | 18 | 3 |
| Σχήμα 8Γ | 19 | 2 |
| Σχήμα 8Δ | 17 | 4 |

Μια πρώτη παρατήρηση που προκύπτει από τα δεδομένα του πίνακα 6 είναι ο μεγάλος αριθμός των επιτυχιών των μαθητών. Ειδικότερα για το σχήμα 8Α έχουμε περισσότερες επιτυχίες από αυτές του αντίστοιχου σχήματος 6 του τρίτου έργου. Γενικά οι μαθητές που ανταποκρίνονται στο πρώτο έργο, συνήθως, ανταποκρίνονται και στα υπόλοιπα. Η συνήθης στρατηγική που ακολουθείται εδώ είναι η πρόσθεση των ακεραίων τετραγώνων και στην συνέχεια η πρόσθεση δύο μισών που δίνουν μια ακέραια μονάδα. Το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η πλειοψηφία των μαθητών/τριών είναι στην αριθμητική καταγραφή της μισής μονάδας. Έτσι άλλες φορές χρησιμοποιούν την ολογραφική καταγραφή και γράφουν, για παράδειγμα, «*13μισό*», ενώ άλλες φορές προσφεύγουν στη βοήθεια του ερευνητή για την επιλογή του συμβολισμού.

**Η στρατηγική Ε=μήκοςΧπλάτος**

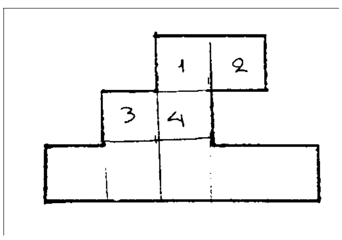
Στην διδασκαλία της γεωμετρίας είναι συνήθης η χρήση «κανονικών» γεωμετρικών σχημάτων όπως, για παράδειγμα, του τετραγώνου και του ορθογωνίου.

Στην μέτρηση της επιφάνειάς τους, σύμφωνα με τις κυρίαρχες διδακτικές πρακτικές, δίνεται έμφαση στο υπολογιστικό μέρος με την χρήση των σχετικών τύπων, γεγονός που υποβαθμίζει τα εννοιολογικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας της μέτρησης. Η τάση αυτή της «αριθμητικοποίησης» των γεωμετρικών εννοιών που περιγράψαμε και στο θεωρητικό μας πλαίσιο, όπου το εμβαδόν προσδιορίζεται ως το γινόμενο ευθυγράμμων τμημάτων, δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησής του. Επιπλέον, η χρήση του χάρακα για τον υπολογισμό του εμβαδού επιπέδων σχημάτων δεν κρίνεται ως η πλέον ενδεδειγμένη μέθοδος για παιδιά μικρών εκπαιδευτικών βαθμίδων [Battista 1982, Freudenthal 1983, Nunes, κ.ά. 1993] στο βαθμό που οδηγεί στην υιοθέτηση λανθασμένων στρατηγικών, όπως η γενικευμένη χρήση των τύπων *Ε=βάσηΧύψος* ή *Ε=μήκοςΧπλάτος*.

Στην έρευνά μας μερικοί μαθητές και μαθήτριες χρησιμοποιούν επίμονα τον τύπο Ε=μήκοςΧπλάτος. Εδώ παρατηρείται μια ποικιλία στην επιλογή των μεγεθών «μήκος» και «πλάτος», ακόμη και στις περιπτώσεις που ένα τέτοιο εγχείρημα είναι ιδιαίτερα δύσκολο λόγω της μορφής των σχημάτων.

Στην συνέχεια θα καταγράψουμε μερικά παραδείγματα, ενδεικτικά των τρόπων εφαρμογής αυτής της λανθασμένης στρατηγικής.

Μια μαθήτρια εφαρμόζει την μέθοδο του πολλαπλασιασμού των μηκών σε όλα τα έργα όπου χρειάζεται ο υπολογισμός του εμβαδού. Για την εύρεση του εμβαδού του σχήματος 6 του παραρτήματος Ι, ενώ τετραγωνίζει την επιφάνεια, στην συνέχεια πολλαπλασιάζει 5{τα τετράγωνα της βάσης}Χ4 {τα τετράγωνα που απομένουν}=20 (σχ. 4).



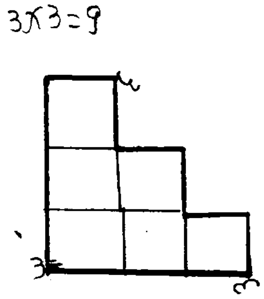

Σχήμα 4

Εδώ φαίνεται να μη συσχετίζεται η αριθμητική έκφραση του εμβαδού με το φυσικό περιεχόμενό της γιατί στην ερώτησή μας:

Ε: «Δηλαδή εδώ χωράνε 20 τετραγωνάκια;»

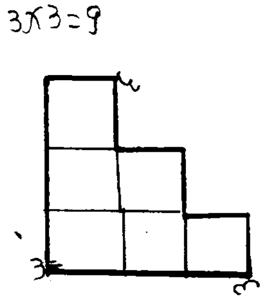
Υ: (μετράει) «Εννέα».

Η ίδια μαθήτρια στο σχήμα 7Β του παραρτήματος, αφού μετρήσει με τον χάρακα τις δυο κάθετες πλευρές βρίσκει 3Χ3=9 τ.ε. (σχ. 5).

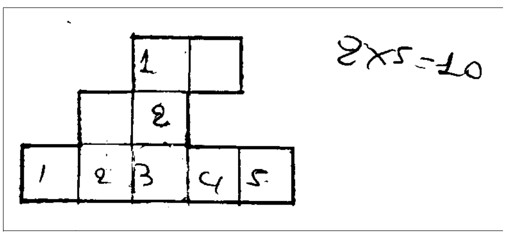



Σχήμα 5

Ένας μαθητής, που χρησιμοποιεί επίσης πολλαπλασιαστικές μεθόδους για το σχήμα 6 του παραρτήματος Ι βρίσκει Ε=2{το ύψος}Χ5{η βάση}=10 (σχ. 6).

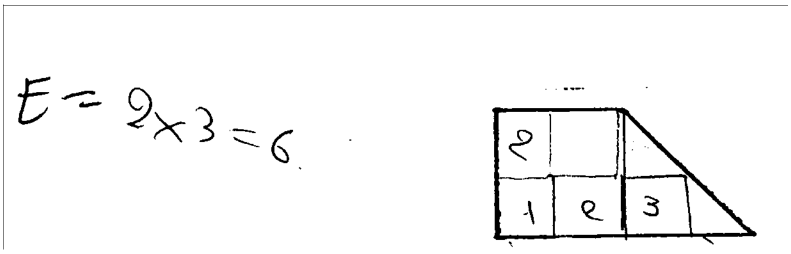



Σχήμα 5




Σχήμα 6

Ο μαθητής του προηγούμενου παραδείγματος αφού τετραγωνίσει το σχήμα 6 του παραρτήματος Ι, με την βοήθεια του τετραγωνικού προτύπου βρίσκει: 2{το ύψος}Χ3{η βάση}=6 τ.ε. (σχ. 7).




Σχήμα 7

Τέλος, ο ίδιος μαθητής για τα σχήματα 7, ενώ ισχυρίζεται πως φαίνονται να έχουν την ίδια επιφάνεια, για το Α βρίσκει 6 τ.ε. και για το Β βρίσκει 3Χ3=9 τ.ε. Στην ερώτησή μας, «*πόσα τετραγωνάκια νομίζεις πως χωράνε μέσα στο σχήμα αυτό* (το Β);», απαντάει «*δέκα*».

Είναι χαρακτηριστικό ότι οι πολλαπλασιαστικές μέθοδοι συνήθως συνοδεύονται από μια ελλιπή κατανόηση του φυσικού περιεχομένου της αριθμητικής έκφρασης του εμβαδού. Έτσι ο προηγούμενος μαθητής, ενώ στην περίπτωση του ορθογωνίου του πέμπτου έργου, βρίσκει σωστά ότι το εμβαδόν του είναι 3Χ5=15 τ.ε., όταν ερωτάται πόσα κατά την άποψή του τετραγωνάκια πλευράς ενός εκατοστού χωράνε στην επιφάνεια αυτή, απαντάει, «*δέκα τετραγωνάκια*»!

## 4. ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Επιχειρήσαμε εδώ να διερευνήσουμε την διδακτική συνεισφορά μιας προσέγγισης της έννοιας του εμβαδού και της μέτρησης επιφανειών, που δίνει έμφαση στα εννοιολογικά χαρακτηριστικά των εννοιών αυτών. Διαπιστώθηκε:

i. Οτι τα προτεινόμενα εργαλεία μέτρησης, «υποδεικνύουν» τρόπους δουλειάς και επηρεάζουν την οργάνωση της δραστηριότητας των μαθητών/τριών.

ii. Η θετική συμβολή της διαδικασίας μέτρησης επιφανειών με επίθεση (επικάλυψη). Επιμείναμε σε μετρικά και ποιοτικά χαρακτηριστικά της διαδικασίας της μέτρησης. Οι μαθητές/τριες μπόρεσαν να ανταποκριθούν σε ένα ικανοποιητικό βαθμό σε προβλήματα μέτρησης επιφανειών που η δυσκολία τους υπερβαίνει τις δυνατότητες αντιμετώπισής τους με τα συνήθη σχολικά εργαλεία.

Από την άλλη, διαπιστώθηκε μια επιμονή των μαθητών και μαθητριών που αποτυγχάνουν στη χρήση στρατηγικών που η γενίκευσή τους οδηγεί σε αποτυχία. Οι στρατηγικές αυτές, που σχετίζονται με κάποιες κυρίαρχες σχολικές πρακτικές, παίρνουν τα χαρακτηριστικά ενός διδακτικού «εμποδίου»[4]. Η επισήμανση και η μελέτη των στρατηγικών αυτών που οδηγούν συχνά σε αποτυχία μπορεί να μας βοηθήσει ώστε να συνάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις παιδαγωγικές στρατηγικές μέτρησης του εμβαδού επιπέδων σχημάτων [Bosari 1994]. Βέβαια, η θετική συμβολή των «εργαλείων» που προτείνονται για την αντιμετώπιση των συγκεκριμένων έργων, δεν μας επιτρέπει ούτε να γενικεύσουμε την αποτελεσματικότητα της δράσης τους, αλλά, ούτε και να αμφισβητήσουμε την σπουδαιότητα των παραδοσιακών τεχνικών μέτρησης που οικειοποιούνται οι μαθητές/τριες κατά την διδασκαλία των μαθηματικών. Πρόθεσή μας ήταν να συνεισφέρουμε σε μια προσπάθεια που γίνεται στο χώρο της μαθηματικής παιδείας να γίνουν τα μαθηματικά περισσότερο κατανοητά και οικεία, ειδικότερα στα θέματα της σύγκρισης και μέτρησης επιφανειών που μας απασχόλησαν στη παρούσα έρευνα.

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Αποστολίκας, Γ., Διονυσοπούλου, Τ. και Σαλβαράς, Γ . (1996), *Τα Μαθηματικά μου. Δ' τάξη Δημοτικού.* Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

Βυγκότσκυ, Λ. (1988), *Σκέψη και γλώσσα*. Εκδόσεις Γνώση, Αθήνα.

Ζαχάρος, Κ. (2000), Η συμβολή πολιτισμικών και ιστορικών παραμέτρων στο χειρισμό προβλημάτων της Γεωμετρίας: Μια εμπειρική έρευνα για τον τρόπο με τον οποίο μαθητές και μαθήτριες της Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αντιμετωπίζουν προβλήματα μέτρησης επιφανειών. Ερευνητική εργασία για την

---

[4] Η έννοια του «επιστημολογικού εμποδίου» αναφέρεται σε αυθεντική γνώση που εδώ είναι συνέπεια των μεθόδων διδασκαλίας και η οποία αντιστέκεται στην κατασκευή μιας νέας γνώσης [Balacheff 1991].

Διδακτορική Διατριβή, που εκπονήθηκε στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης.

Balacheff, N. (1991), The benefits and the limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. van Dormolen [Eds.], *Mathematical Knowledge: Its Growth Trough Teaching*, Dordrecht: Kluwer, 175-192.

Barbin E. (1989), Μια περίπτωση διδασκαλίας των Μαθηματικών με ιστορική προοπτική. *Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών*, τεύχος 17.

Battista, M. (1982), Understanding area and area formoulas. *Mathematics Teacher*, 75(5), 362-368.

Beck, C., & Maier, H. (1992-93), Η συνέντευξη στην έρευνα. *Διδακτική των Μαθηματικών*, εκδότης Α. Γαγάτσης, Θεσσαλονίκη, 261-299.

Bishop, A. (1983), Space and Geometry. *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, edited by Richard Lesh & Marsha Landau, Academic Press, Inc., 175-203.

Borasi, R. (1994), Capitalising on errors as "springboards for inquiry": a teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 166-208.

Bouche, R. (1992), Προβληματισμοί για την ιστορία της Γεωμετρίας. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχος 10-11, 67-130.

Bunt, L., Jones, P., & Bedient, J., (1981). *Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών μαθηματικών*. Γ.Α.Πνευματικός, Αθήνα.

Cobb, P. (1989), Experiential, Cognitive, and Anthropological Perspectives in Mathematics Education. *For Learning Mathematics*, 9(2), 32-42.

Fowler, D. (1987), *The Mathematics of Plato's Academy.* Clarendon Press, Oxford.

Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* D. Reidel Publishing Company, Holland.

Hart, K. (1981), Measurement. *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, K. M. Hart (ed.), John Murray, London, 9-22.

Kennedy, J. (1993), Area and Perimeter Connections. *Mathematics Teacher*, 86(3), 218-220.

Kidman, G., & Cooper, T., J., (1997),. Area Integation Rules for Grades 4, 6 and 8 Students. *Procceedings of the 21th international Conference for the Psychology of Mathematics Education*. E. Pehkonen (ed.), Lahti, Finland, 136-143.

Kouba, V., Brown, C., Carpenter, T., Lindquist, M., Silver, E., & Swafford, J. (1988), Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics: Measurement, Geometry, Data Interpretation, Attitudes, and Other Topics. *Arithmetic Teacher*, 35(9), 10-16.

Nitabach, E., & Lehrer, R. (1996), Developing Spatial Sense through Area Measurement. *Teaching Children Mathematics*, 2(8), 473-476.

Nunes, T. (1992), Cognitive Invariants and Cultural Variation in Mathematical Concepts. *International Journal of Behavioral Development*, 15(4), 433-453.

Nunes, T., Light, P., & Mason, J. (1993), Tools for thought: the measurement of length and area. *Learning and Instruction,* 3, 39-54.

Outhred, L., & Mitchelmore, M. (1996), Children's Intuitive Understanding of Area Measurement. *Procceedings of the 20th international Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, Spain, 91-98.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1956), *The child's conception of space.* Routledge and Kegan Paul, London.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. (1960), *The child's conception of geometry.* Routledge and Kegan Paul, London.

Reynolds, A., & Wheatley, G. (1996), Elementary Students' Construction and Coordination of Units in an Area Setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(5), 564-581.

Russel, J. (1976), Nonconservation of area: Do Children Succeed Where Adults Fail? *Developmental Psychology*, 12(4), 367- 368.

Saljo, R. (1994), Μάθηση και μεσολάβηση. Η προσαρμογή της πραγματικότητας σε έναν πίνακα. *Κοινωνιο-Γνωστική προσέγγιση και διδακτικές διαδικασίες της μάθησης των Φυσικών και Λογικο-μαθηματικών εννοιών στο Σχολείο*, Γ. Παπαμιχαήλ (επιμ.), Gutenberg, Αθήνα, 127-148.

Sierpinska, A. (1991), Μερικές ιδέες πάνω στη μεθοδολογία της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών που συνδέεται με την έννοια του επιστημολογικού εμποδίου. *Τετράδια Διδακτικής των Μαθηματικών*, τεύχ. 7, 11-28.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114 - 145.

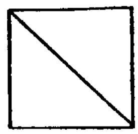
Tierney, C., Boyd, C. & Davis, G. (1990), Prospective Primary Teachers' Conceptions of Area. *Proceedings of the Fourteenth Psychology in Mathematics Education Conference*, vol. 2, 307-315.

Vygotsky, L. (1978), *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes.* Cole, M., John-Steiner, V., Scribner, S. & Souberman, E. (eds), Harvard University Press.

Wagman, H. (1975), The Child's Conception of Area Measure. *Στο Children's Mathematical Concepts, Six Piagetian Studies in Mathematics Education*, Rosskopf M. (ed.), Teachers College, Columbia University, 71-110.

Whetley, G., & Reynolds, A. (1996), The construction of abstract units in geometric and numeric settigs. *Educational Studies in Mathematics*, 30(1), 67-83.

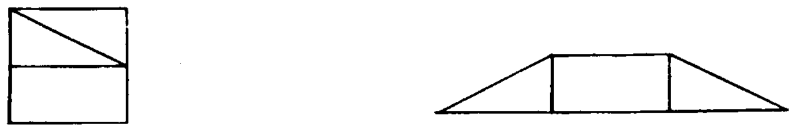
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι



Δείξε την περίμετρο του σχήματος.

Όταν θέλουμε να βρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας δείξε τι είναι αυτό που μετράμε.

Σχήμα 1



A B

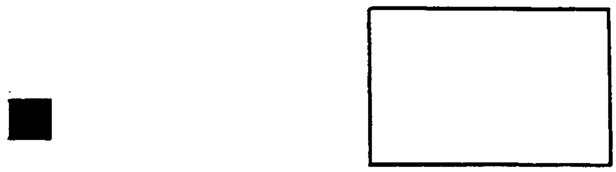
Τα παραπάνω σχήματα έχουν ίσες επιφάνειες ή όχι;

Σχήμα 2

A B

Τα παραπάνω σχήματα έχουν ίσες επιφάνειες ή όχι;

Σχήμα 3



Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος

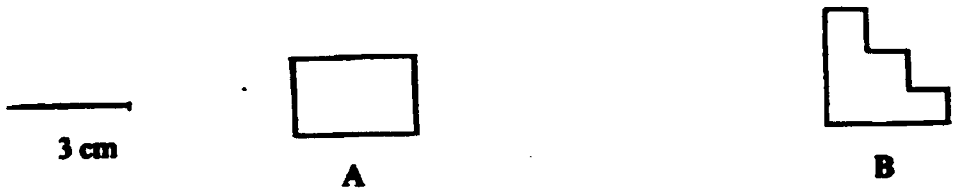
Σχήμα 4


Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος

Σχήμα 5


Να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος

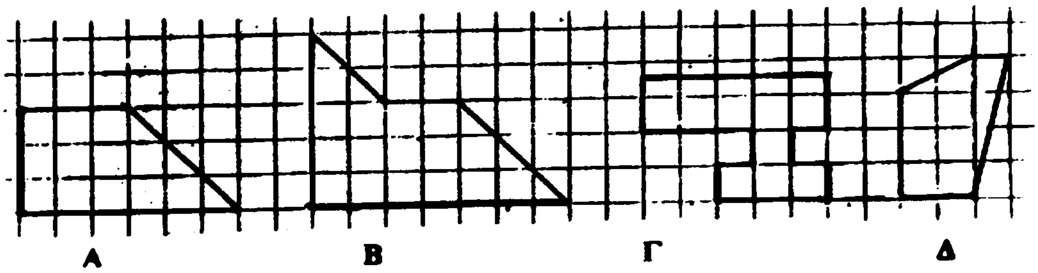
Σχήμα 6




Να βρεθεί η περίμετρος των δύο σχημάτων.

Έχουν τα σχήματα ίσα εμβαδά ή όχι;

Σχήμα 7



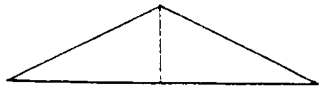

Να βρεθεί το εμβαδόν των σχημάτων

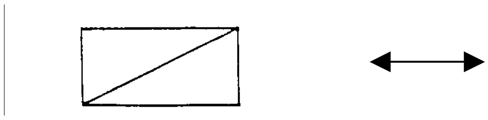
Σχήμα 8

**ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ**

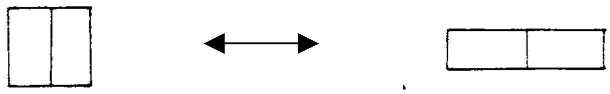
(Περιέχει δραστηριότητες που έγιναν στη διάρκεια της «διδασκαλίας»)



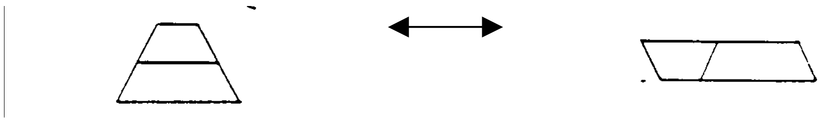




Σχήμα 1α



Σχήμα 1β

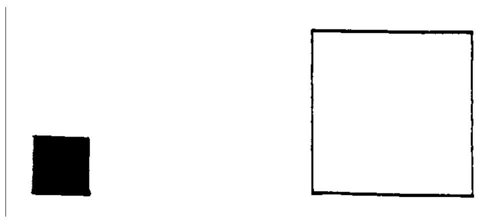


Σχήμα 1γ

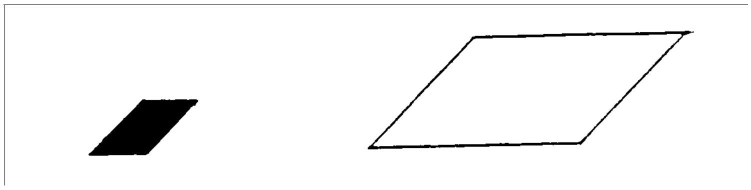
Σύγκριση των επιφανειών με ανάλυση και ανασύνθεση

Ζητείται από τους/τις μαθητές/τριες να συγκρίνουν τις επιφάνειες των σχημάτων 1α, 1β και 1γ.

Σχήμα 1

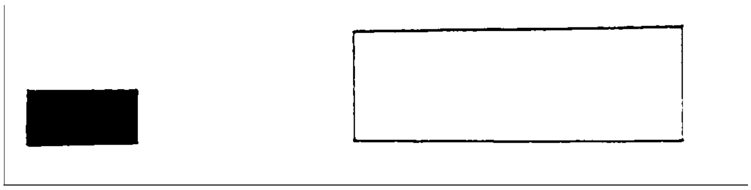


Σχήμα 2α



Σχήμα 2β

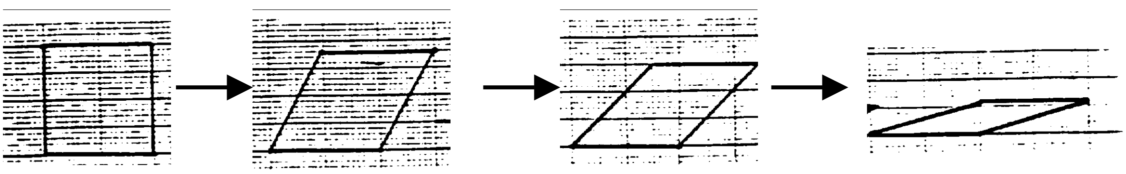
Σχήμα 2γ



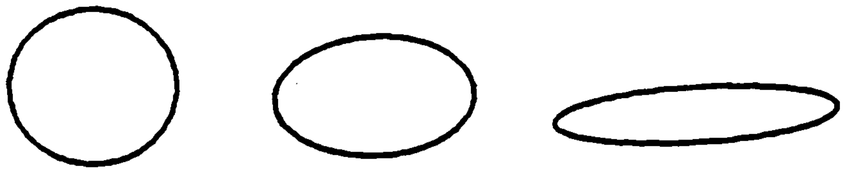
Μέτρηση με τη διαδικασία της επικάλυψης

Ζητείται να υπολογιστούν πόσα καρτελάκια των σχημάτων 2α, 2β και 2γ χωράνε στις αντίστοιχες επιφάνειες.

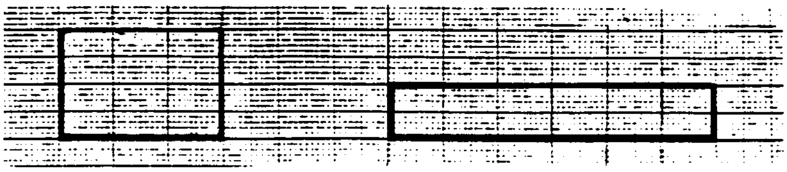
Σχήμα 2



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β



Σχήμα 3γ

Σχέσεις Περιμέτρου-Εμβαδού

Με τα μοντέλα των σχημάτων 3 ή αντίστοιχες εύκαμπτες μεταλλικές κατασκευές προσπαθούμε να παρακολουθήσουμε τις αλλαγές της περιμέτρου και του εμβαδού.

Σχήμα 3